

Ecoulements compressibles et dynamique des gaz



Objectifs

- L'objectif de ce cours est de vous familiariser avec les propriétés des écoulements de gaz.
- Les écoulements de gaz sont très particuliers car le milieu continu considéré est **compressible**, ce qui implique un couplage fort entre la dynamique (niveau macroscopique) et la thermodynamique (représentation du niveau microscopique).
- Les domaines d'application industriels sont très diversifiés :
 - ✓ écoulement dans les conduites ;
 - ✓ déplacement d'objets dans un gaz (vitesse subsonique, supersonique, hypersonique) ;
 - ✓ sécurité (explosions, ondes de déflagration ou de détonation)

Incompressible versus Compressible

- Incompressible signifie qu'une masse donnée de gaz occupe toujours un volume de même taille.
- Compressible signifie qu'une masse donnée de gaz est en mesure d'occuper un volume qui varie dans le temps.

I. Introduction

- Nous allons voir qu'un écoulement de gaz à faible vitesse est généralement peu compressible, donc les propriétés sont 'comme si' le milieu était incompressible.
- A plus grande vitesse, les propriétés de l'écoulement sont différentes.

I. Introduction

- Qu'est-ce qui change quand une masse de gaz peut occuper un volume qui n'est pas constant ?
- Si vous comprimez un gaz dans un piston, son volume diminue, sa température augmente et la pression aussi. C'est la loi des gaz parfaits : pression, température et densité sont couplées.
- Si la compression résulte de la géométrie de l'écoulement (confinement), ces quantités thermodynamiques seront aussi couplées avec la vitesse.
- Pour de faibles vitesses (écoulement 'quasi-incompressible'), il n'y aura pas de couplage entre la vitesse, la température et la densité. La pression sera aussi peu influencée par la température et la densité.

I. Introduction

- La loi d'état des gaz parfait résume la partie thermodynamique :

$$PV = nRT$$

- $R = 8.3143 \text{ J/(mol K)}$ et n : nombre de moles
- En divisant par la masse de gaz M contenue dans le volume V , cela devient :

$$P \frac{V}{M} = \frac{n}{M} RT$$
$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{W} T = rT$$

I. Introduction

- La loi d'état des gaz parfait :

$$P = \rho r T$$

$$r = \frac{R}{\text{Masse molaire du gaz}}$$

- Pour de l'air standard : $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

I. Introduction

- Quand l'écoulement d'un gaz est à faible vitesse en régime quasi-incompressible, il est possible d'écrire la loi d'état sous la forme :

$$P_o = Cst = \rho r T$$

- La densité et la température peuvent varier, mais la pression thermodynamique va rester constante. Comme quand de l'air chaud monte dans une pièce, ou dans une flamme à pression atmosphérique.
- Le couplage entre le niveau microscopique (pression thermodynamique) et le macroscopique (mouvement d'ensemble des molécules) est faible.

I. Introduction

- Dans ce cas simple on aura la relation :

$$\rho(\underline{x}, t)T(\underline{x}, t) = \rho_o T_o$$

- Il existe quand même des gradients de pression pour faire avancer l'écoulement, mais cette pression dynamique n'est pas fortement couplée à la pression thermodynamique, qui est en rapport avec l'énergie interne des molécules (niveau microscopique).
- Donc dans un écoulement de gaz à densité variable faiblement compressible, l'énergie interne (microscopique) n'est pas couplée à l'énergie cinétique (macroscopique).

I. Introduction

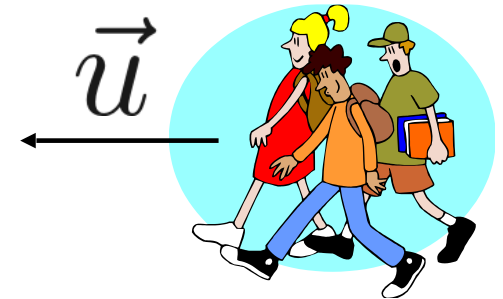
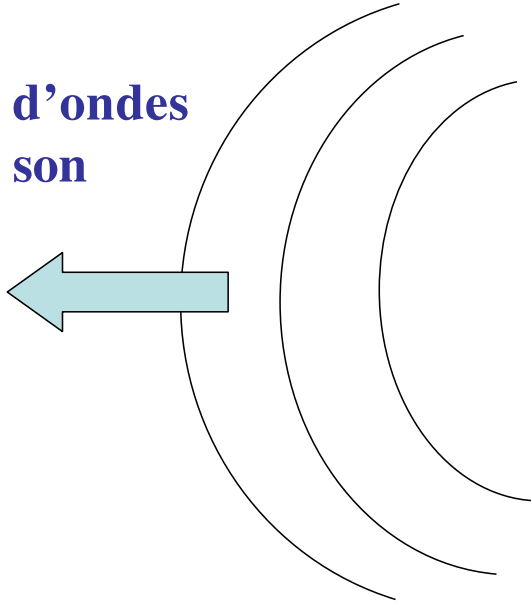
- Dans un écoulement compressible, l'énergie interne et l'énergie cinétique seront fortement couplée.
- C'est ce qui est spécifique à la dynamique des gaz.
- Nous allons voir que cela provoque des effets surprenants comme les ondes de chocs.
- Il est aussi essentiel d'en tenir compte lors du dimensionnement des conduites de gaz. Sinon il y a risque de blocage sonique et autres effets très indésirables et dangereux.

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Lors du déplacement d'un objet dans un gaz, il y a deux possibilités :
 - ✓ les particules fluides sont informées en avance de l'arrivée de l'objet et le milieu s'est préparé à le recevoir ;
 - ✓ Les particules fluides n'ont pas été informées et il y a un choc lors de la rencontre.

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

Propagation d'ondes
à la vitesse du son



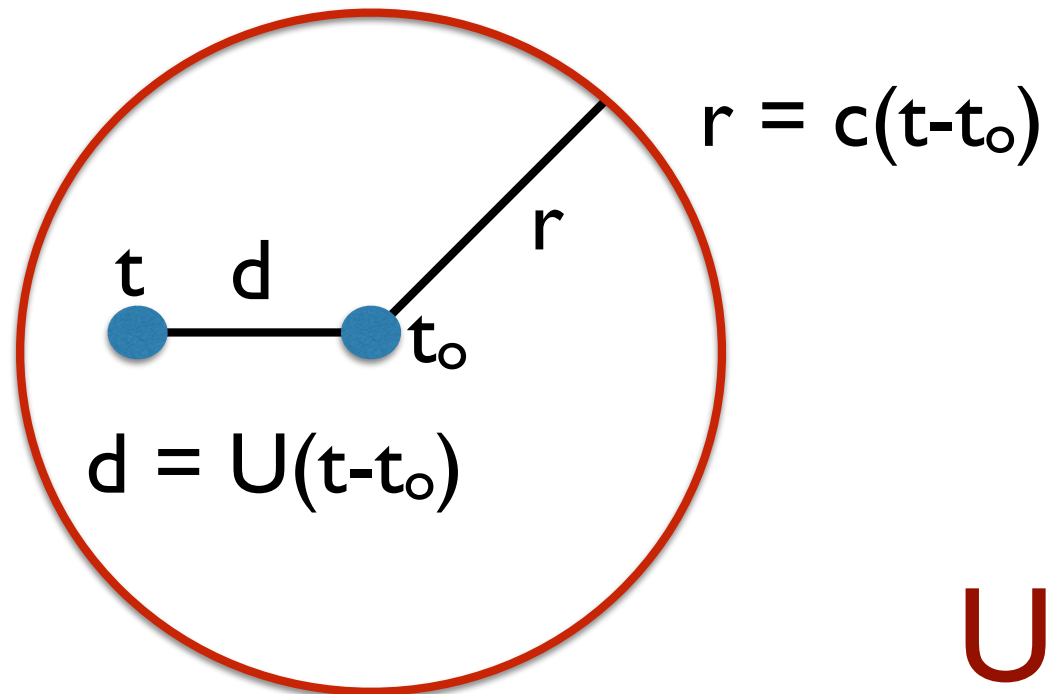
Le milieu est informé avant votre arrivée, il se prépare pour vous accueillir tout en conservant son énergie interne quasi-constante

- L'écoulement est alors très faiblement compressible

$$\rho T = \rho_o T_o$$

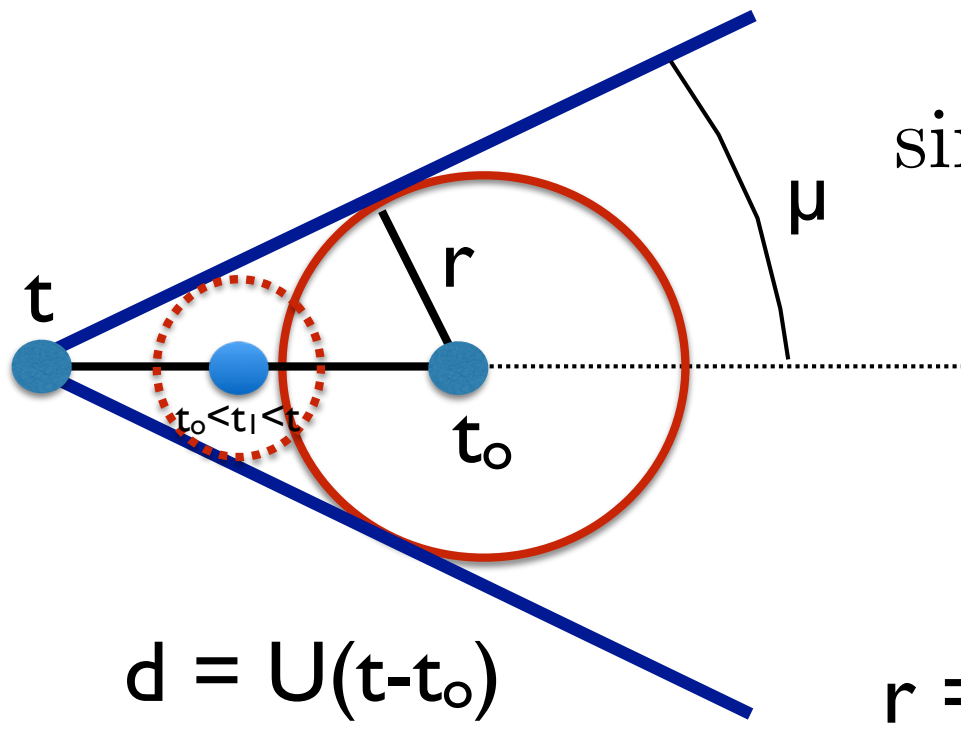
2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Tant qu'une source acoustique se déplace à une vitesse plus petite que ' c ', la vitesse du son :
- ✓ pour toutes les positions après un instant t_0 , l'objet (source) reste toujours à l'intérieur des ondes sphériques qui ont été émises depuis t_0



2. La vitesse du son et le nombre de Mach

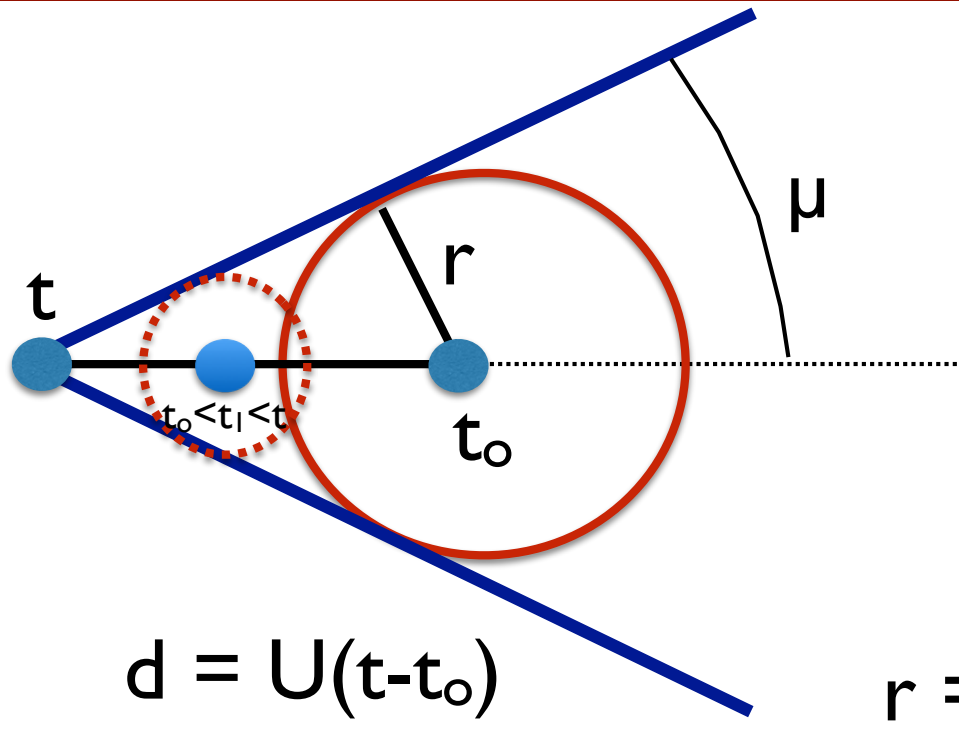
- Si la source (objet) accélère, elle finira par rattraper son onde acoustique et quand elle va plus vite que la vitesse du son :
- ✓ l'objet est toujours à l'extérieur de la famille des ondes qu'il a émises



$$\sin(\mu) = \frac{c(t - t_0)}{U(t - t_0)} = \frac{c}{U} = \frac{1}{\mathcal{M}}$$

$$U > c$$

2. La vitesse du son et le nombre de Mach



$$\sin(\mu) = \frac{c(t - t_o)}{U(t - t_o)} = \frac{c}{U} = \frac{1}{\mathcal{M}}$$

- L'objet se déplace toujours devant les fronts d'ondes qui forment une enveloppe de perturbations qui définit la **ligne de Mach** ou **ligne caractéristique**.
- μ est l'angle de Mach.

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Le nombre de Mach est défini :

$$\mathcal{M} = \frac{U}{c}$$

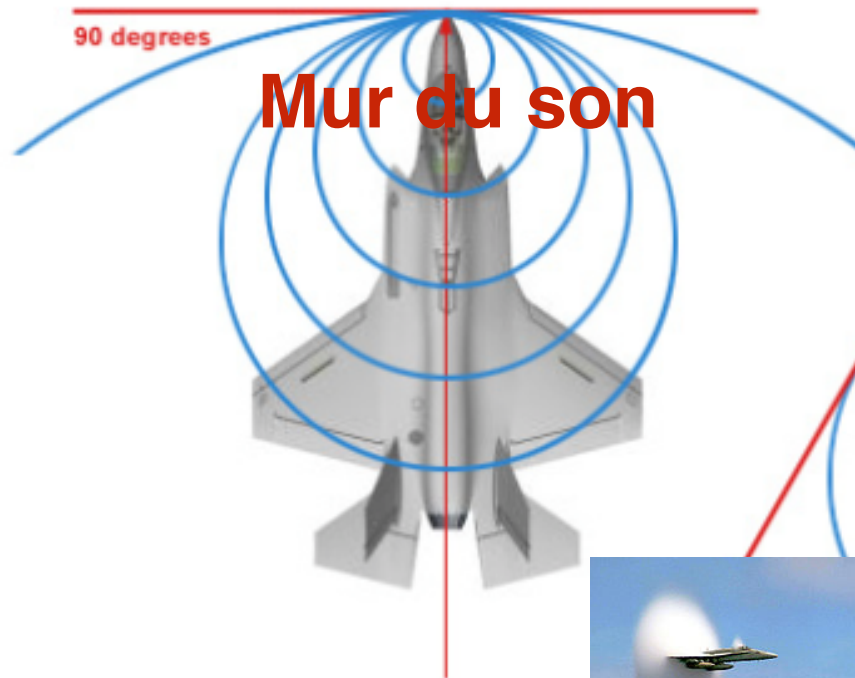


Ernst Mach
(1838-1916)

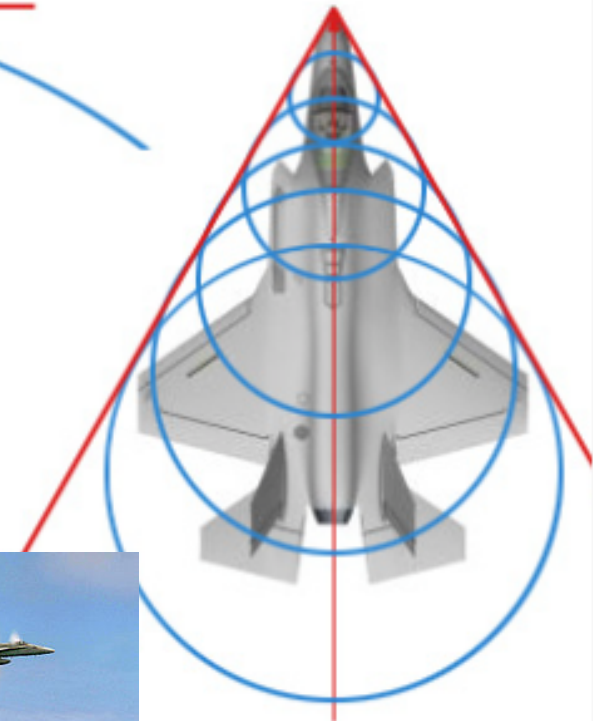
$$\mathcal{M} < 1$$



$$\mathcal{M} = 1$$



$$\mathcal{M} > 1$$



2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Quand le Mach est plus grand que l'unité, le milieu n'est pas informé de l'arrivée de l'objet et il se forme un 'choc' pour accorder les deux milieux.
- Nous parlerons plus loin dans le cours des propriétés des chocs.
- Pour l'instant, retenons que le nombre de Mach $= U/c$ est un paramètre important.

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- La vitesse du son mesure la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le milieu compressible, c'est à dire la vitesse de propagation de la variation de pression.
- Les molécules qui constituent le gaz s'entrechoquent pour transmettre l'onde de pression.
- Plus la variation de densité associée à la variation de pression est grande, plus les molécules qui constituent le gaz vont se comprimer et donc transmettre moins vite l'information.

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- La vitesse du son est donc inversement proportionnelle à la variation de densité.
- Elle est proportionnelle à la variation de pression.
- Le rapport pression/densité est proportionnel à une vitesse au carré. (Nous le démontrerons un peu plus loin.)

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Ceci pour une transformation isentropique (i.e. il n'y a pas de perte d'information, pas de dissipation de l'onde acoustique).
- Pour une transformation isentropique :

$$PV^\gamma = cst$$

$$P\rho^{-\gamma} = cst$$

$$d(P\rho^{-\gamma}) = 0$$

$$\rho^{-\gamma}dP + P(-\gamma)\rho^{-\gamma-1}d\rho = 0$$

$$\frac{\rho^{-\gamma}dP}{P\rho^{-\gamma}} + \frac{P(-\gamma)\rho^{-\gamma-1}d\rho}{P\rho^{-\gamma}} = 0$$

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Vitesse du son évolution isentropique :

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma r T = c^2$$

2. La vitesse du son et le nombre de Mach

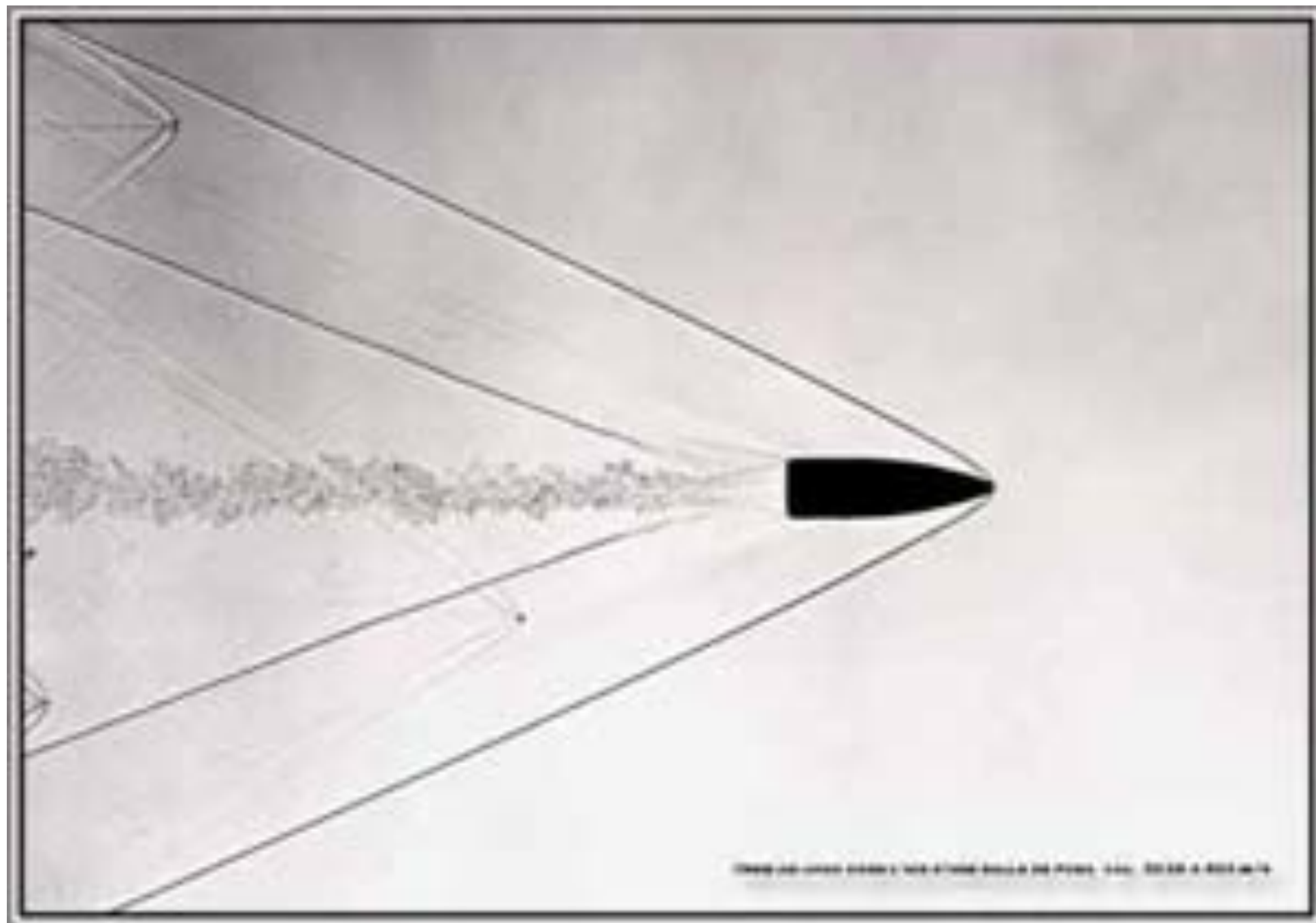
- Le nombre de Mach mesure en fait indirectement le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie interne :

$$\mathcal{M} = \frac{|\vec{u}|}{c} = \frac{|\vec{u}|}{\sqrt{\gamma r T}} \equiv \left(\frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} \right)^{1/2}$$

- Nous allons montrer plus loin dans le cours que :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \mathcal{M}^2$$

- La variation relative de densité sera inférieure à 10% si $M < 0.3$.
- En dessous de $M = 0.3$, l'écoulement est dit à densité variable, au dessus il est compressible.







2. La vitesse du son et le nombre de Mach

- Classification des écoulements en dynamique des gaz :

Mach	Ecoulement
$M < 0.3$	Densité variable
$0.3 < M < 1$	Subsonique compressible
$M = 1$	Sonique
$M \sim 1$	Transsonique
$1 < M < 5$	Supersonique
$5 < M$	Hypersonique

3. Conservation de la masse

- Nous allons écrire quelques relations génériques simples, mais très utiles, en formulant les hypothèses suivantes :
 - ✓ Les phénomènes de viscosité ne sont pas dominants et seront négligés pour décrire la dynamique de l'écoulement.
 - ✓ Seule la vitesse débitante nous intéresse et la connaissance des variations dans une seule direction sera suffisante pour décrire l'écoulement, qui sera donc globalement mono-dimensionnel.

3. Conservation de la masse

- La conservation de la masse a été discutée dans le cours précédent et aussi en MMC :

**Flux qui entrent et
sortent par les
frontières du volume**

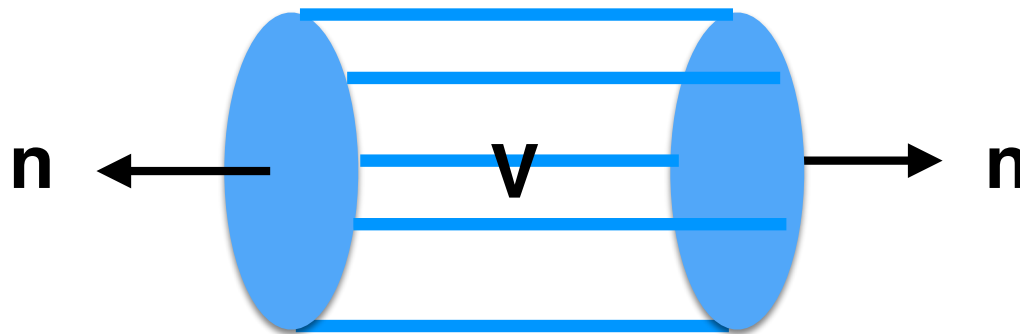
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_{\partial V} d\dot{Q}_m$$

**Variation de masse
dans le volume**

3. Conservation de la masse

- C'est comme à la banque : un flux qui entre est compté positivement et un flux qui sort négativement.
- Ceci est assuré automatiquement par le produit scalaire entre le vecteur vitesse et la normale à la surface du volume :

$$d\dot{Q}_m = -\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$



3. Conservation de la masse

- La conservation de la masse s'écrit aussi en transformant les flux en intégrale de volume :

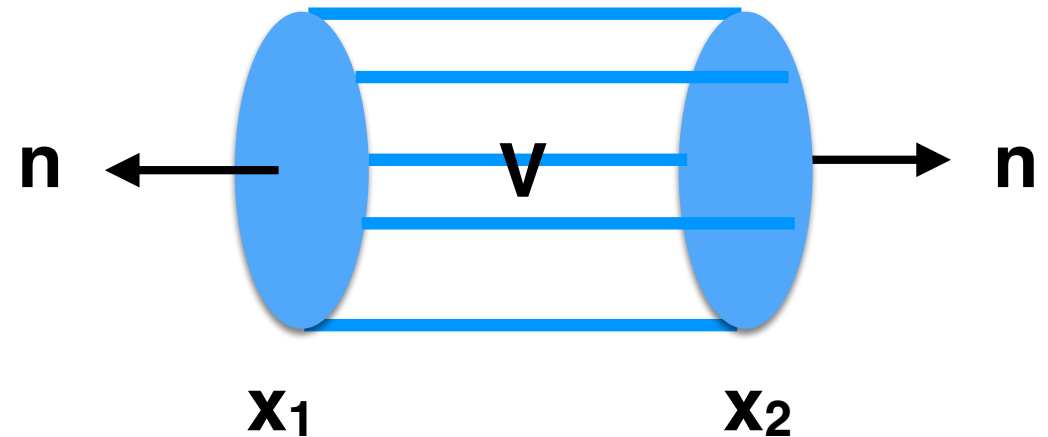
$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{\partial V} d\dot{Q}_m = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

3. Conservation de la masse

- Si l'écoulement est stationnaire et monodimensionnel :

$$\int_{\partial V} d\dot{Q}_m = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$



$$\rho(x_1) [\vec{u}(x_1) \cdot \vec{n}(x_1)] S(x_1) + \rho(x_2) [\vec{u}(x_2) \cdot \vec{n}(x_2)] S(x_2) = 0$$

$$\rho(x) u(x) S(x) = Cst$$

3. Conservation de la masse

- Ceci peut aussi s'écrire en calculant la différentielle et en divisant par $\rho \cdot u \cdot S$:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0$$

- Quand ρ est constant, les variations relatives de u et S se compensent.
- Quand ρ est variable, c'est beaucoup plus compliqué, il y a un couplage entre vitesse, section et densité (qui dépend aussi de P et T).

4. Conservation de la quantité de mouvement

- La variation de quantité de mouvement dans le temps est égale aux flux de quantité de mouvement et à la somme des forces (ici limitée aux forces de pression) :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV}_{\text{Variation de quantité de mouvement}} = \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{u} d\dot{Q}_m}_{\text{Flux aux surfaces}} - \underbrace{\int_{\partial V} P \mathbf{n} dS}_{\text{Forces de pression}}$$

4. Conservation de la quantité de mouvement

- Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc dans le cas où les forces de gravité sont négligeables et l'écoulement est stationnaire :

$$-\int_{\partial V} \mathbf{u} d\dot{Q}_m = \int_{\partial V} \mathbf{u}(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -\int_{\partial V} P \mathbf{n} dS$$


**Direction où sera
projetée l'équation**

Flux de quantité de mouvement = Forces de Pression

4. Conservation de la quantité de mouvement

- En projetant suivant la direction 'i' et en utilisant la transformation d'intégrale sur une surface vers une intégrale de volume, ceci devient :

$$\int_{\partial V} [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}] (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial V} u_i (\rho u_j n_j) dS = \int_V \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} dV = - \int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dV$$

- D'après la conservation de la masse : $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$
- L'équation pour la QDM est donc :

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

4. Conservation de la quantité de mouvement

- Dans le cas 1D qui nous intéresse, ceci s'écrit :

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dP}{dx}$$

- Ou encore avec la conservation de la masse: $\frac{d\rho u}{dx} = 0$

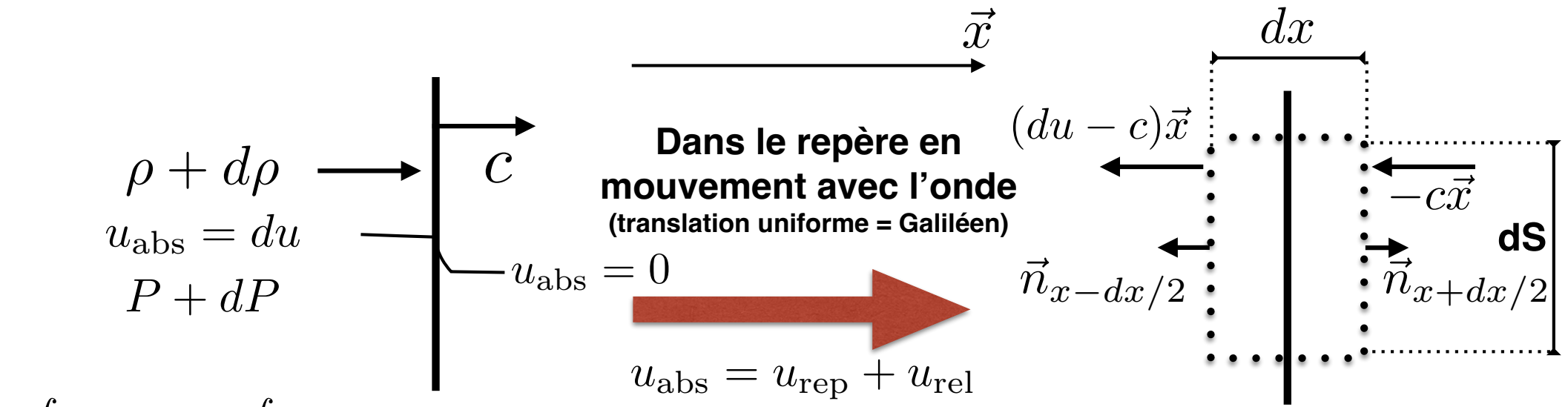
$$\frac{d}{dx} (\rho u^2 + P) = 0$$

$$\rho(x_1)u^2(x_1) + P(x_1) = \rho(x_2)u^2(x_2) + P(x_2) = \text{Cst}$$

Attention ceci n'est pas Bernoulli, c'est la conservation de la quantité de mouvement pas de l'énergie !

4.1 Application à la vitesse du son

- Bilan de masse autour de l'onde générée par une perturbation qui se propage à la vitesse 'c' dans un milieu au repos :



$$\int_{\partial V} d\dot{Q}_m = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$-(\rho + d\rho)(du - c)\vec{x} \cdot \vec{n}_{x-dx/2} dS - (-\rho c)\vec{x} \cdot \vec{n}_{x+dx/2} dS = 0$$

$$(\rho + d\rho)(du - c) + \rho c = 0$$

$$\rho du - \rho c + \underbrace{d\rho du}_{\ll \rho du} - cd\rho + \rho c = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho \frac{du}{d\rho} = c$$

4.1 Application à la vitesse du son

- En combinant avec la conservation de la quantité de mouvement exprimée dans le référentiel de l'onde :

$$\rho(-c\vec{x}) \cdot \frac{du}{dx} \vec{x}_{\text{QDM}} = -\frac{dP}{dx} \quad \longrightarrow \quad \rho c du = dP_{\text{QDM}}$$

$$\rho \frac{du}{d\rho} = c \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{d\rho} = c^2_{\text{Masse+QDM}}$$

4. Conservation de la quantité de mouvement

- Repartons de la forme différentielle pour faire apparaître la vitesse du son dans la QDM :

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dP}{dx}$$

- Ou encore :

$$\begin{aligned} u du &= - \frac{dP}{\rho} = - \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= -c^2 \frac{d\rho}{\rho} = c^2 \left[\frac{du}{u} + \frac{dS}{S} \right] \end{aligned}$$

4. Conservation de la quantité de mouvement

- La relation entre variation relative de surface et de vitesse est donc :

$$\frac{du}{u} = \left[\frac{1}{\mathcal{M}^2 - 1} \right] \frac{dS}{S}$$

- La relation entre Δu et ΔS change de signe suivant le nombre de Mach !

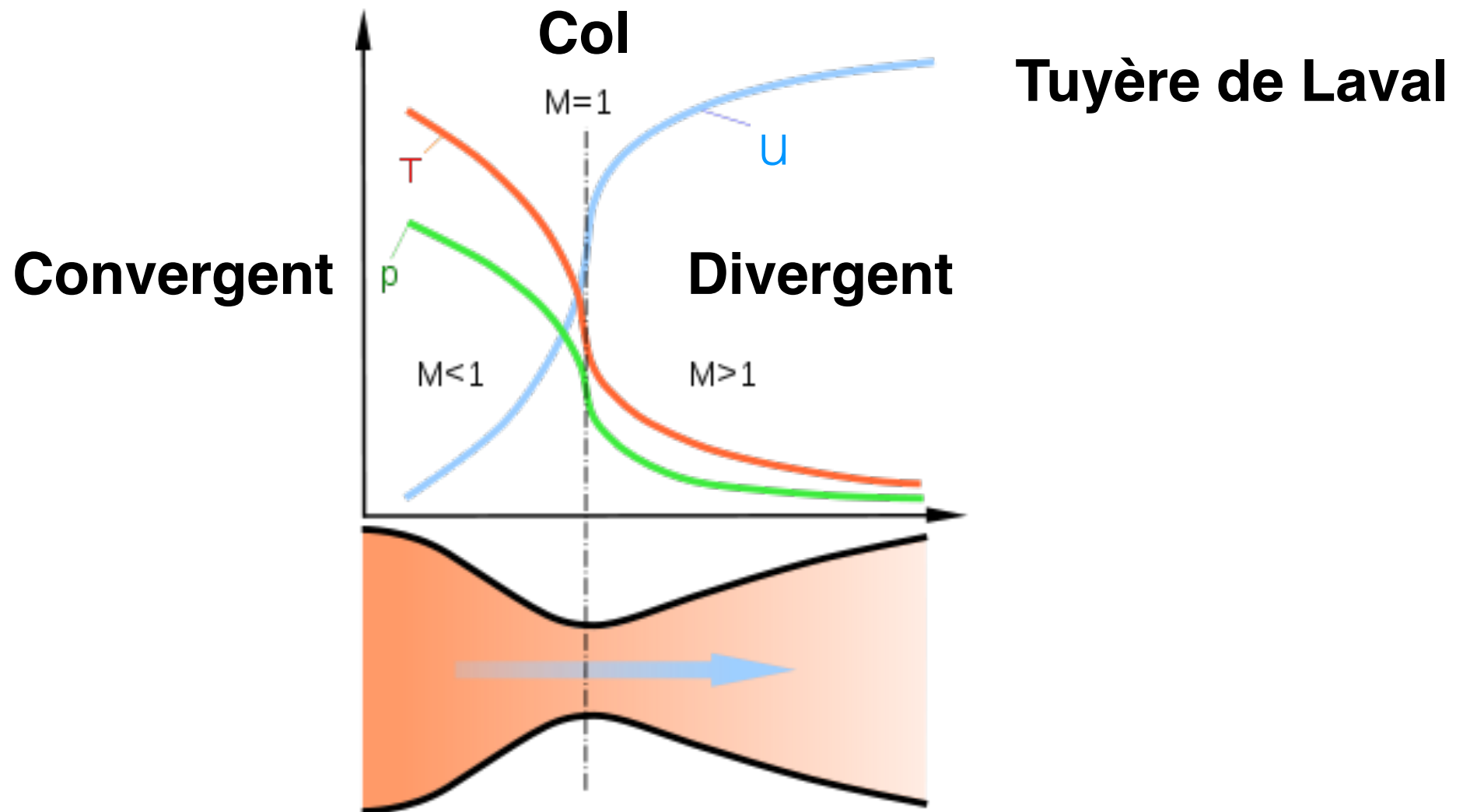
4. Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{du}{u} = \left[\frac{1}{\mathcal{M}^2 - 1} \right] \frac{dS}{S}$$

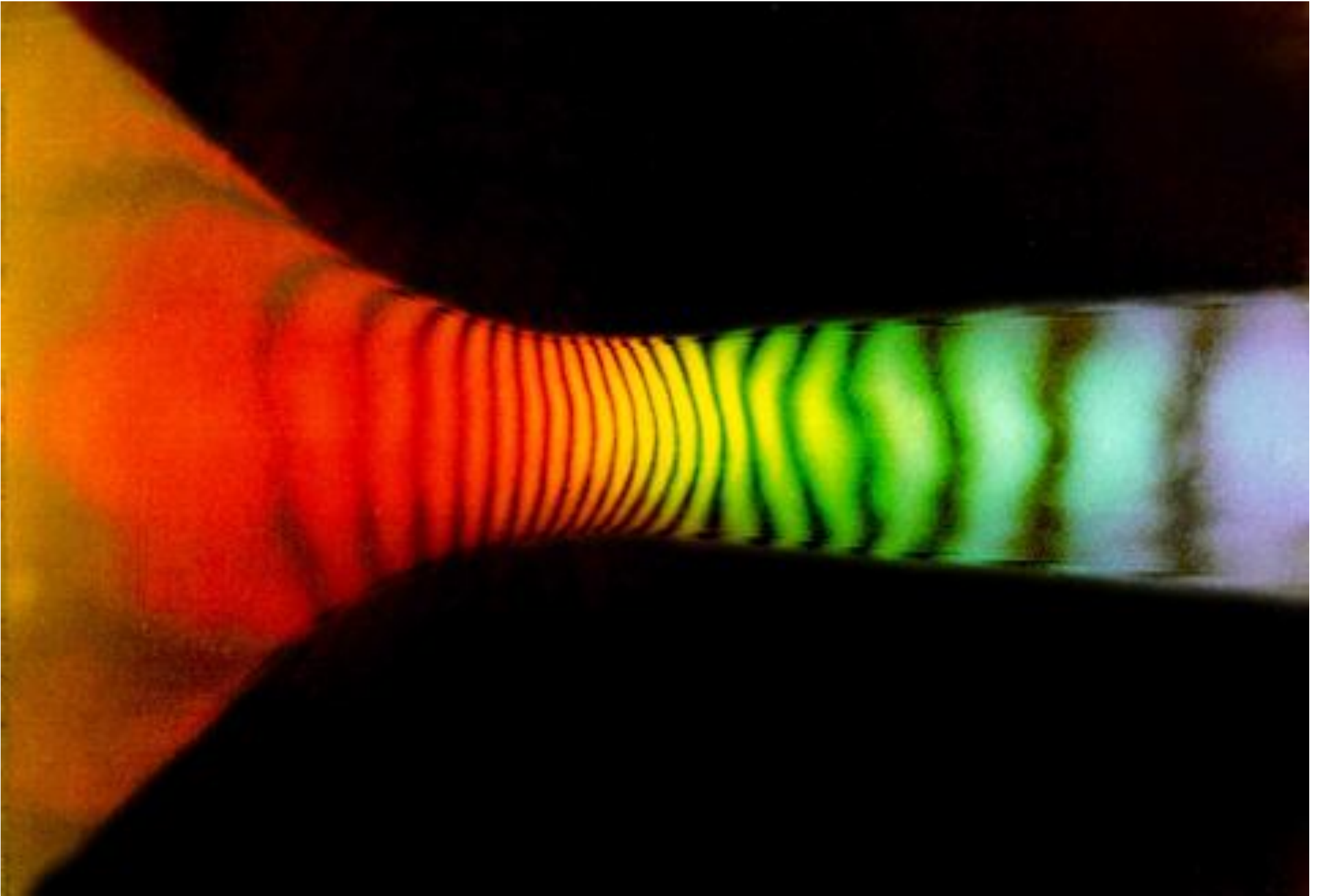
	Variation surface	Subsonique $M < 1$	Supersonique $M > 1$
Convergent	$dS/S < 0$	$du/u > 0$	$du/u < 0$
Divergent	$dS/S > 0$	$du/u < 0$	$du/u > 0$

4. Conservation de la quantité de mouvement

- Dans une conduite, il n'existe donc qu'une seule façon d'accélérer un gaz jusqu'à un régime supersonique, c'est d'utiliser une tuyère convergente divergente :



4. Conservation de la quantité de mouvement



- Nous allons dériver toute une série de relations en couplant la conservation de l'énergie avec la dynamique.
- Ces relations constituent les lois de base pour comprendre et prédire les écoulements de gaz.

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Relation d'Etat du gaz :

$$P = \rho r T$$

- Transformation isentropique (nous allons en reparler) :

$$P \rho^{-\gamma} = Cst$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Les relations de conservation usuelles sont divisées par la masse et le volume massique est introduit :

$$v = \frac{V}{M} = \frac{1}{\rho}$$

Energie interne :

$$de = \frac{dE}{M} = \frac{MC_v dT}{M} = C_v dT$$

Capacité calorifique massique, parfois notée 'petit' c_v

- En absence de transformation d'énergie en chaleur (pas de pertes), dans un gaz le travail des forces de pression est égal à la variation d'énergie interne :

$$de = C_v dT = -P dv$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- En présence de transformation en chaleur : la différence entre le travail des forces de pression et la variation d'énergie interne est calibrée par la variation d'entropie pondérée par la température :

**Flux de
chaleur**

**Variation
d'énergie interne**

$$\delta Q = T ds = de - (-P dv)$$

**Variation
d'entropie**

**Travail des forces
de pression**

- Premier principe de la thermodynamique ou conservation de l'énergie :

$$\delta Q - P dv = de$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Si l'écoulement est isentropique :

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1} = \frac{c_p}{\gamma}$$

- Travail des forces
de pression
massique

$$c_v dT + P d \left(\frac{1}{\rho} \right) = T ds = 0$$

Variation
d'énergie interne
massique

$$\frac{1}{\gamma - 1} d \left(\frac{P}{\rho} \right) + P d \left(\frac{1}{\rho} \right) = T ds = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) P d \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} dP = 0$$

$$\gamma P d \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dP = 0$$

$$-\gamma \left(\frac{d\rho}{\rho} \right) + \frac{dP}{P} = 0 \quad \longrightarrow \quad P \rho^{-\gamma} = \text{Cst}$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Partons de la relation de Bernoulli (en massique) :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = Cst$$

Pression

Cinétique



1700-1782

Pays-Bas & Suisse

- En dynamique des gaz, l'énergie interne n'est pas constante, elle est couplée à la dynamique donc on l'ajoute au bilan :

$$C_v T + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = Cst$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Propriétés physique des gaz parfaits :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$$

Capacité calorifique à pression constante

Capacité calorifique à volume constant

$$C_p - C_v = r = \frac{R}{W}$$

Masse molaire du gaz

$$C_v = \frac{r}{\gamma - 1} = \frac{C_P}{\gamma}$$

Vitesse du son

$$c^2 = \gamma r T = \gamma P / \rho$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Quelques valeurs numériques pour se donner une idée :

Gaz	M en $kg.kmol^{-1}$	γ à $\theta = 298.15K$	r en $J.kg^{-1}.K^{-1}$	C_p à $\theta = 298.15K$ en $J.kg^{-1}.K^{-1}$
Air	28.96	1.400	287.06	1004.00
Argon	39.94	1.658	208.15	524.61
Gaz Carbonique	44.01	1.288	188.92	845.73
Hélium	4.00	1.659	2078.20	5233.50
Hydrogène	2.01	1.405	4124.20	14315.00
Azote	28.01	1.400	296.80	1038.30
Oxygène	32.00	1.395	259.82	916.90
Eau	18.01	1.329	461.50	1863.10

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Avec : $C_v = \frac{r}{\gamma - 1}$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = C_{st}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} rT + \frac{1}{2} u^2 = C_{st}$$

$$C_P T + \frac{1}{2} u^2 = C_{st}$$

Enthalpie

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- L'enthalpie contient l'information sur l'énergie interne plus le travail des forces de pression :

$$h = C_p T = (C_v + r)T = e + \frac{P}{\rho} = e + Pv$$

$$v = \frac{1}{\rho}$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- La conservation de l'énergie sous la forme enthalpie + cinétique, c'est Bernoulli avec l'énergie interne en plus !

$$h + \frac{1}{2}u^2 = Cst$$

Enthalpie totale

$$h_i = Cst$$

- L'enthalpie correspond à l'énergie totale d'un système. Elle comprend l'énergie interne, qui est l'énergie nécessaire pour créer le système, à laquelle est additionné le travail que ce système doit exercer contre la pression extérieure pour occuper son volume.

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- Montrons tout ceci à partir d'un bilan d'énergie sur un volume de gaz :
 - ✓ La variation d'énergie totale (interne + cinétique) est égale aux travaux des forces, donc la variation d'énergie totale par unité de temps est égale à la puissance des forces.
 - ✓ La conservation de l'énergie en régime stationnaire implique que la somme des flux d'énergie entrant et sortant plus la puissance des forces est nulle :

$$\int_{\partial V} \left(\overset{\text{Energie cinétique}}{C_v T + \frac{1}{2} u^2} \right) d\dot{Q}_m + \int_{\partial V} \overset{\text{Puissance force de pression}}{-P \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS} = 0$$
$$\int_{\partial V} \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} \right) d\dot{Q}_m = 0$$

5. Boite à outil pour la dynamique des gaz

- La conservation du débit dans l'écoulement implique :

$$\left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} \right) (x_1) \times \dot{Q}_m(x_1) = \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} \right) (x_2) \times \dot{Q}_m(x_2)$$

- Avec la conservation de la masse : $\dot{Q}_m(x_1) = \dot{Q}_m(x_2) = \dot{Q}_m = \text{Cst}$
- La loi précédente est retrouvée :

$$C_v T + \frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} = \text{Cst} = C_p T + \frac{1}{2} u^2$$

- Soufflerie de Von Braun (aujourd'hui au VKI Bruxelles)

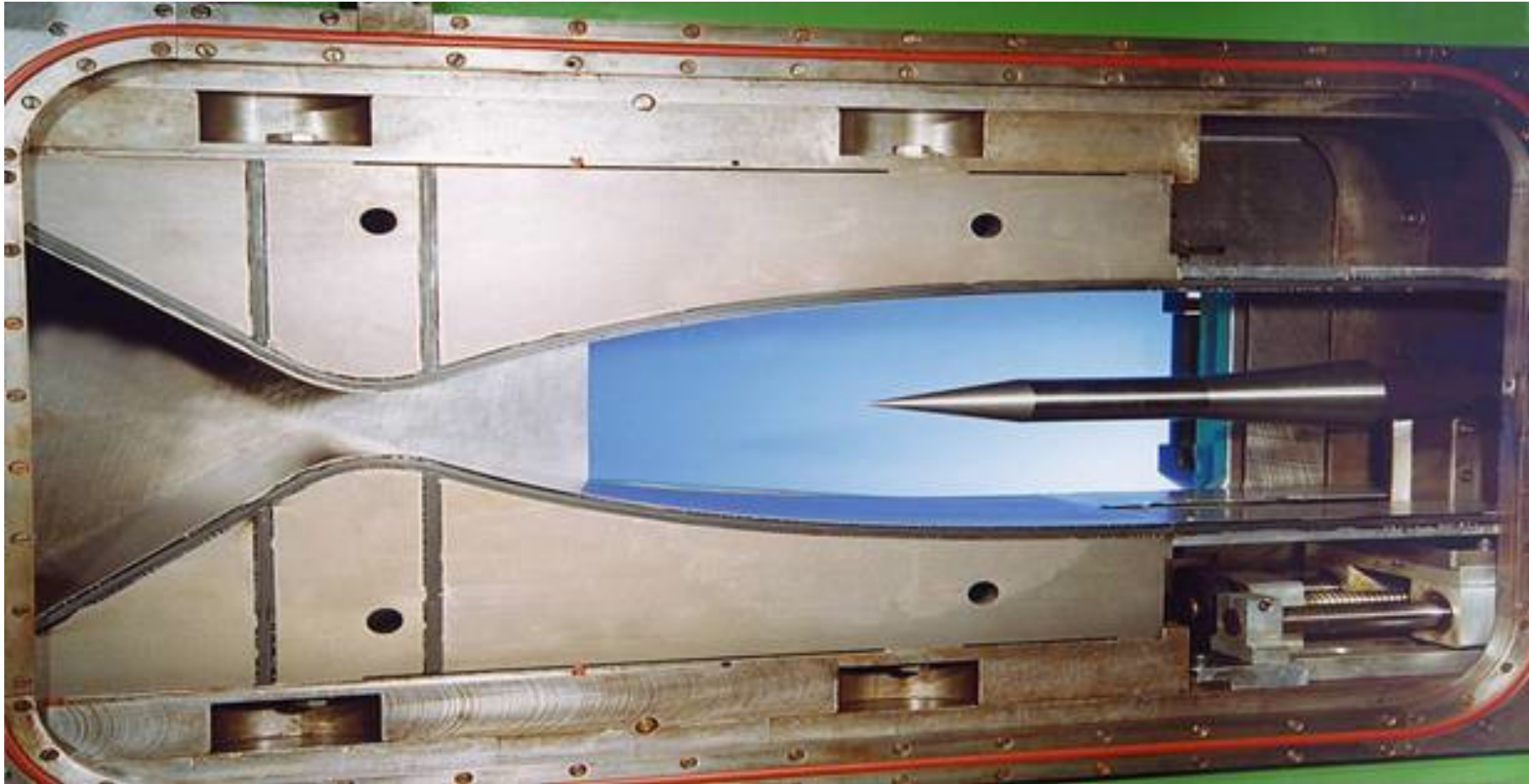


Supersonique à rafales

$S = 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$

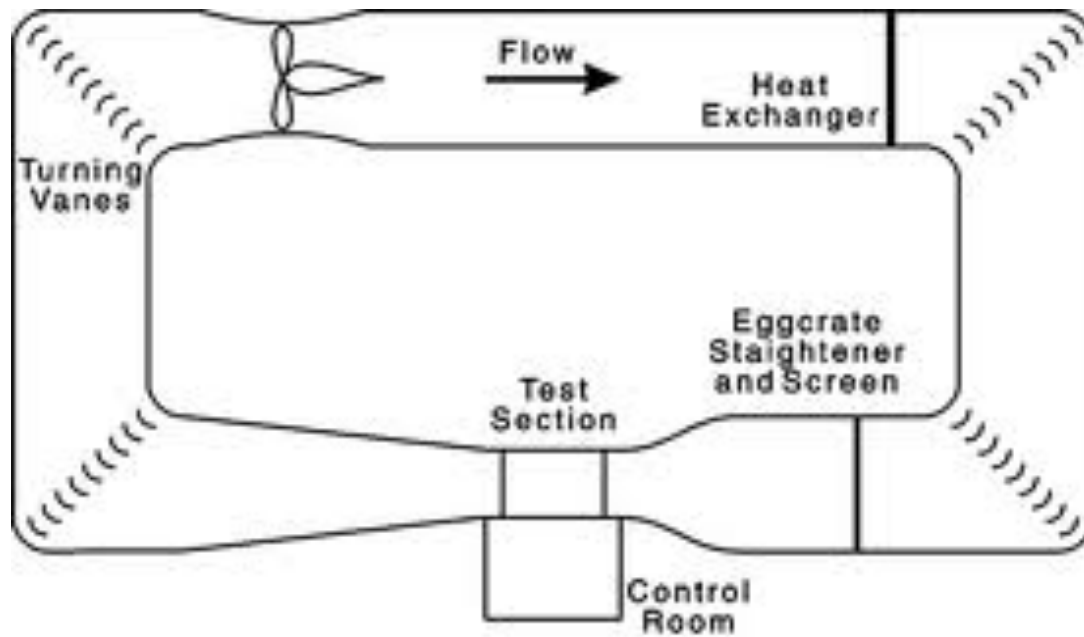
Mach 1,4 $\rightarrow$ 4,4

$P_i = 0,4 \rightarrow 1,6 \text{ MPa}$

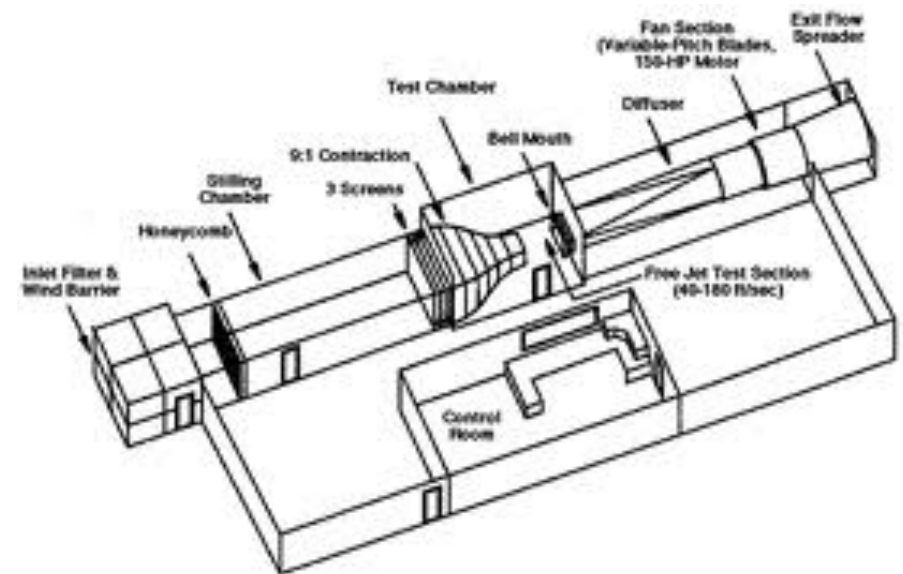


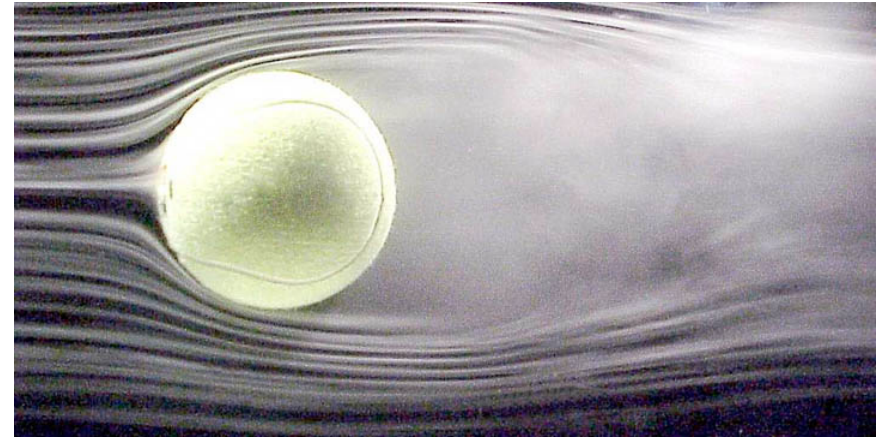






Schematic of Swift Engr. Wind Tunnel







Ferrari





NASA AMES, CA, USA



6. Conditions de références

- La condition locale dans l'écoulement est appelée 'condition statique', $u(x)$, $P(x)$, $\rho(x)$, $T(x)$, etc.
- Pour calibrer la quantité d'énergie disponible dans un écoulement de gaz, une condition de référence est introduite :
 - ✓ Quand l'écoulement est arrêté, toute son énergie est stockée sous la forme d'énergie interne (température) et potentiel (pression). Ces conditions en température et pression sont les **conditions d'arrêt isentropique**.
 - ✓ C'est la condition dans un réservoir pressurisé qui aurait généré les conditions de l'écoulement en x par détente, donc on parle aussi de **condition de réservoir**.
 - ✓ C'est aussi la condition dite **totale** (température totale, pression totale).

6. Conditions de références

- ✓ La condition dite '**critique**' est celle où l'écoulement est à $\text{Mach} = 1$.
- ✓ Ces conditions de références sont définies en tous les points, même quand l'écoulement n'est pas à l'arrêt ou n'est pas à $\text{Mach} = 1$.
- Notations :
 - ✓ Les conditions d'arrêts isentropiques ou totales ($u = 0$) sont notées avec l'indice ou l'exposant 'i' ou 'o'
 - ✓ Les conditions critiques ($\text{Mach} = 1$) sont notées avec l'indice ou l'exposant '*' ou 'cr'.

6. Conditions de références

- La relation entre température et vitesse via la condition d'arrêt isentropique ($u = 0$) est obtenue en repartant de la conservation de l'énergie totale en isentropique :

$$C_p T + \frac{1}{2} u^2 = C_p T_i$$

Energie locale

**Température
d'arrêt ou totale**

$$C_p = \gamma C_v = \gamma (C_p - r)$$

$$C_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1}$$

6. Conditions de références

$$\frac{\gamma r T}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u^2 = \frac{\gamma r T_i}{\gamma - 1}$$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2(x)}{\gamma r T(x)} = \frac{T_i}{T(x)}$$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2(x) = \frac{T_i}{T(x)}$$

6. Conditions de références

- La température isentropique sert de référence pour le niveau d'énergie contenue dans l'écoulement.
- Cette référence va varier d'un point à un autre si l'écoulement n'est pas isentropique.
- La conservation de l'énergie apporte donc une relation bi-univoque entre le nombre de Mach, la température et la température isentropique.

6. Conditions de références

- D'après la loi d'état : $P = \rho r T$; $P_i = \rho_i r T_i$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 = \frac{T_i}{T} = \frac{P_i}{P} \frac{\rho}{\rho_i}$$

- Avec conservation de l'énergie seule, il est impossible d'isoler une relation entre rapport de pression (P_i/P) et nombre de Mach et une relation entre rapport de densité (ρ_i/ρ) et nombre de Mach.
- Découpler pression/densité, afin d'obtenir des relations avec le nombre de Mach, implique d'ajouter l'hypothèse isentropique.
- Ceci provient du simple fait que pression et densité (ou volume spécifique) sont couplés à travers le travail des forces de pression qui contrôle la partie réversible des transferts d'énergie (le fameux - PdV).

6. Conditions de références

- L'ajout de l'isentropique permet d'isoler les rapports de pression et de densité en fonction du nombre de Mach :

$$P_i \rho_i^{-\gamma} = P(x) \rho(x)^{-\gamma}$$

$$P_i \left(\frac{P_i}{r T_i} \right)^{-\gamma} = r^\gamma P_i^{1-\gamma} T_i^\gamma = r^\gamma P^{1-\gamma}(x) T(x)^\gamma$$

$$\frac{P_i}{P(x)} = \left(\frac{T(x)}{T_i} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} = \left(\frac{T_i}{T(x)} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

6. Conditions de références

- Pour la densité :

$$\frac{P_i}{P(x)} = \left(\frac{\rho_i}{\rho(x)} \right)^\gamma$$

$$\frac{\rho_i}{\rho(x)} = \left(\frac{P_i}{P(x)} \right)^{1/\gamma} = \left(\frac{T_i}{T(x)} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

6. Conditions de références

- D'où les relations entre un point de l'écoulement et la condition d'arrêt :

$$\frac{T_i}{T(x)} = F(\mathcal{M}(x)) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2(x)$$

$$\frac{P_i}{P(x)} = [F(\mathcal{M}(x))]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho(x)} = [F(\mathcal{M}(x))]^{1/(\gamma-1)}$$

6. Conditions de références

- La condition critique est obtenue pour $M = 1$

$$\frac{T_i}{T_\star} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

$$\frac{P_i}{P_\star} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_\star} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

6. Conditions de références

- En combinant ces deux dernières séries de relations :

$$\frac{T_{\star}}{T(x)} = \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \mathcal{M}^2(x) = G(\mathcal{M}(x))$$
$$G(\mathcal{M} = 1) = 1$$

$$\frac{P_{\star}}{P(x)} = [G(\mathcal{M}(x))]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_{\star}}{\rho(x)} = [G(\mathcal{M}(x))]^{1/(\gamma-1)}$$

6. Conditions de références

- La vitesse du son critique et le nombre de Mach critique sont :

$$c_{\star} = \sqrt{\gamma r T_{\star}} \quad \mathcal{M}_{\star} = \frac{u}{c_{\star}} = \frac{u}{\sqrt{\gamma r T_{\star}}}$$

- $M_{\star}$ est le nombre de Mach mesuré par rapport à la vitesse du son qu'aurait l'écoulement s'il était à Mach=1. (Quand $M = 1$, $M_{\star} = 1$.)

- Conservation de l'énergie :

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 = \frac{c_{\star}^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}c_{\star}^2 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_{\star}^2$$

**Expression de
l'enthalpie totale**

6. Conditions de références

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 = \frac{c_\star^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}c_\star^2 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}c_\star^2$$

$$\frac{1}{\mathcal{M}^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{1}{\mathcal{M}_\star^2}$$

$$\mathcal{M}_\star^2 = \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}^2}{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}^2}$$

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Dans une tuyère convergente-divergente, si l'écoulement est subsonique au col, il est possible d'augmenter la vitesse jusqu'à obtenir $Mach = 1$ au col.
- En aval du col où $Mach = 1$, l'écoulement est supersonique et la divergence (augmentation de la surface) permet de continuer à accélérer l'écoulement.
- Dans une tuyère convergente-divergente, le débit nominal est obtenu quand le nombre de Mach est égal à un au col.
- Attention: si $Mach = 1$ était atteint avant le col, l'écoulement serait alors supersonique dans une zone où la surface diminue, ce qui impliquerait une baisse de la vitesse dans le convergent et une augmentation de la densité (pour conserver le débit). La compression forte pourrait in fine former un bouchon (blocage sonique).

7. Dimensionnement d'une tuyère

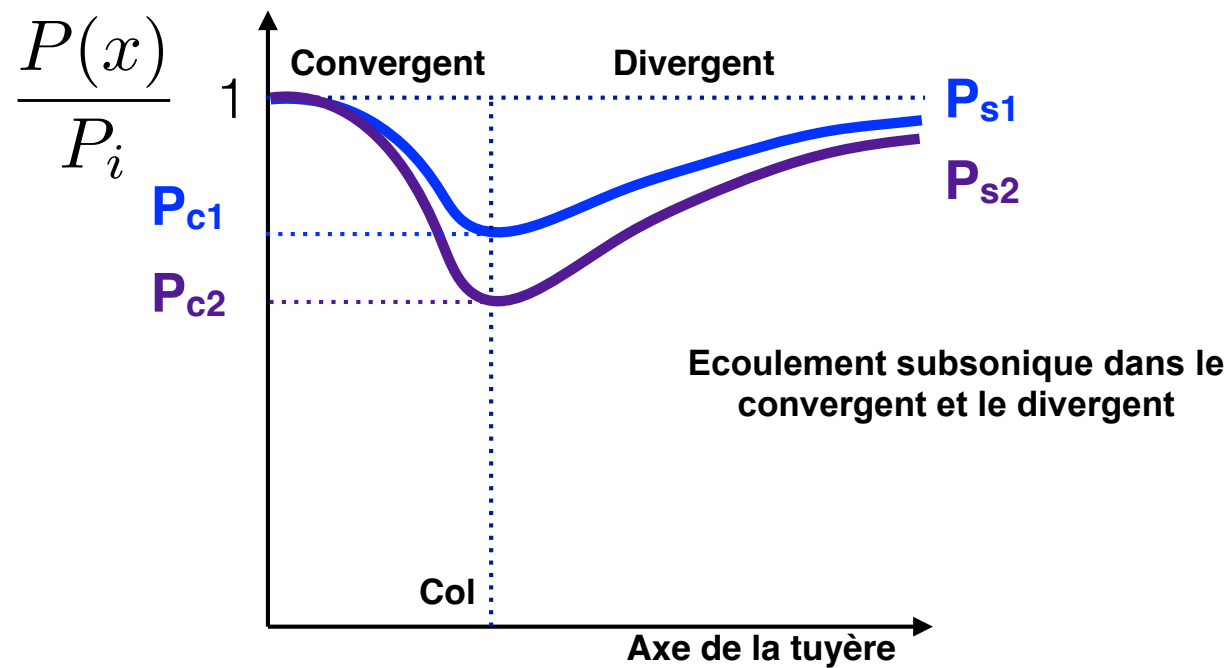
- En pratique c'est la relation entre variation de vitesse, variation de section et nombre de Mach qui explique tout ceci :

$$(\mathcal{M}^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dS}{S}$$

- Quand le Mach approche de l'unité, dS tend vers zéro. Donc le Mach unitaire (condition sonique) n'est possible qu'au col (ni avant, ni après).
- Le débit nominal dans la tuyère ne dépend que des conditions isentropique (i.e. de l'énergie contenue dans l'écoulement) et de la section au col.

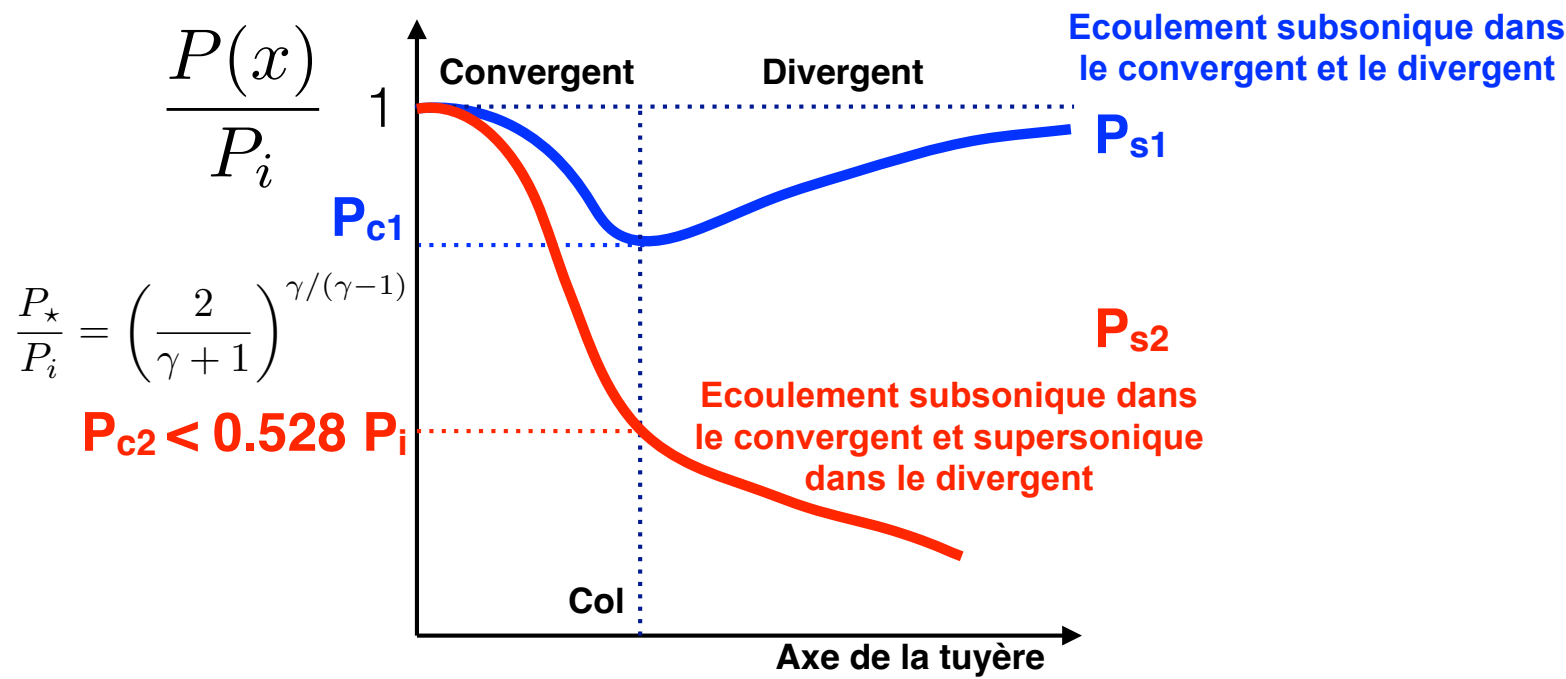
7. Dimensionnement d'une tuyère

- Une différence de pression entre l'entrée et la sortie d'une tuyère est obtenue en augmentant la pression en amont ou en diminuant la pression en aval.
- Dans une tuyère convergente/divergente, dès que la pression est plus faible en sortie qu'en entrée, l'écoulement accélère dans le convergent et la pression diminue (Bernoulli).
- Pour une différence de pression limitée entre l'entrée et la sortie, la pression au col sera plus petite que la pression en sortie, car l'écoulement décélère dans le divergent et la pression remonte jusqu'à la sortie.



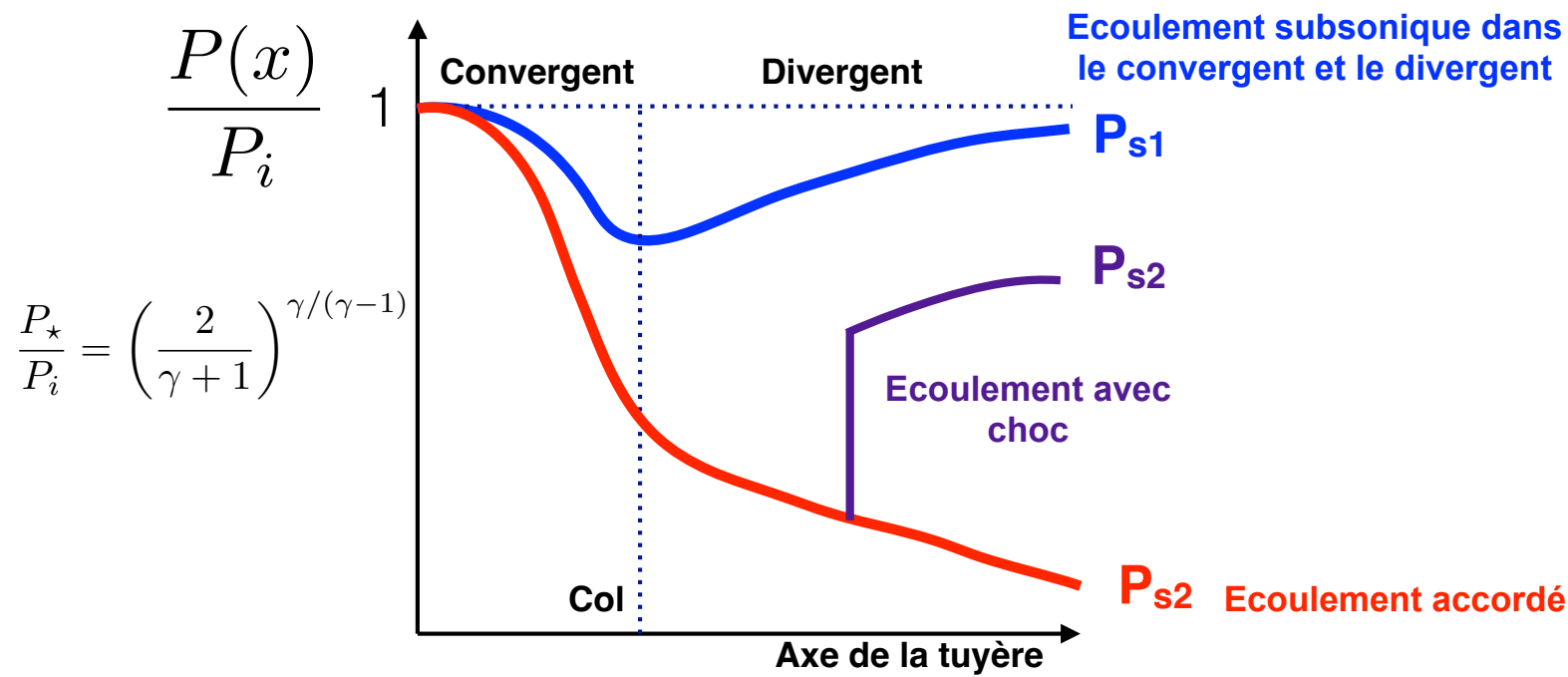
7. Dimensionnement d'une tuyère

- Plus la différence de pression augmente, plus l'écoulement accélère dans le divergent et plus la pression au col baisse.
- Quand la pression au col atteint la pression critique $P_* = 0.528 P_i$ l'écoulement est à Mach = 1 au col et la tuyère est 'amorçé'.
- L'écoulement devient supersonique dans le divergent.
- Cet écoulement supersonique se propage sans préoccupation de la pression de sortie, car il va maintenant plus vite que l'acoustique, la pression va donc continuer à diminuer dans le divergent.



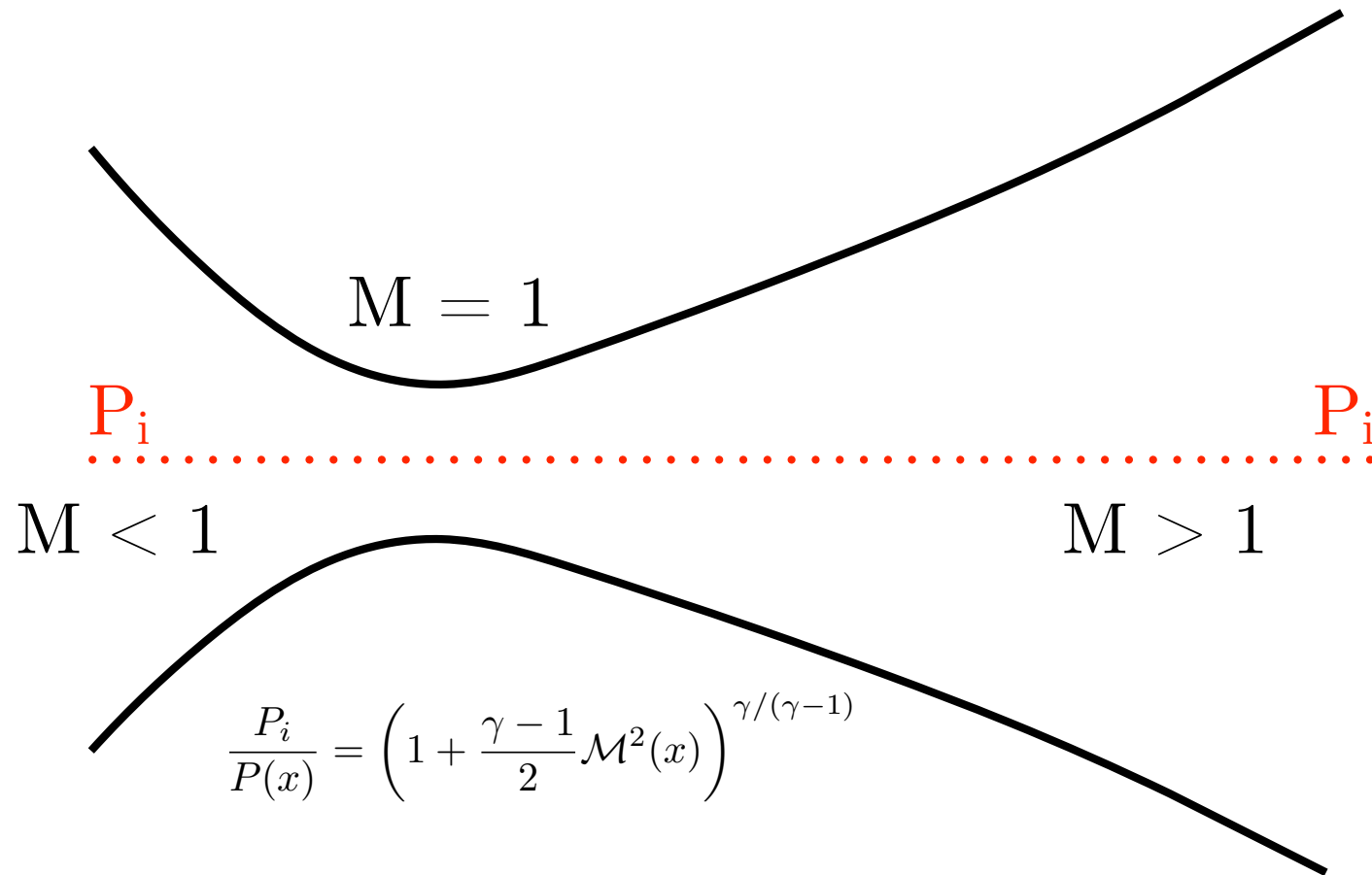
7. Dimensionnement d'une tuyère

- Une fois la tuyère amorcée (Mach = 1 au col), il existe trois possibilités :
 - ✓ La pression dans l'écoulement en sortie est égale à la pression dans l'atmosphère en aval de la tuyère, c'est le régime 'accordé'.
 - ✓ La pression dans l'écoulement en sortie est plus petite que la pression ambiante. Une brusque recompression (onde de choc) va se positionner dans la tuyère pour raccorder la pression entre la tuyère et l'environnement. Le choc se positionne au nombre de Mach (section) qui permet de vérifier les conditions de saut de pression attendue à la traversée d'une onde de choc.
 - ✓ La pression ambiante est plus petite que la pression en sortie et l'écoulement est sur-détendu (des ondes de détentes vont accompagner l'écoulement en sortie de tuyère).



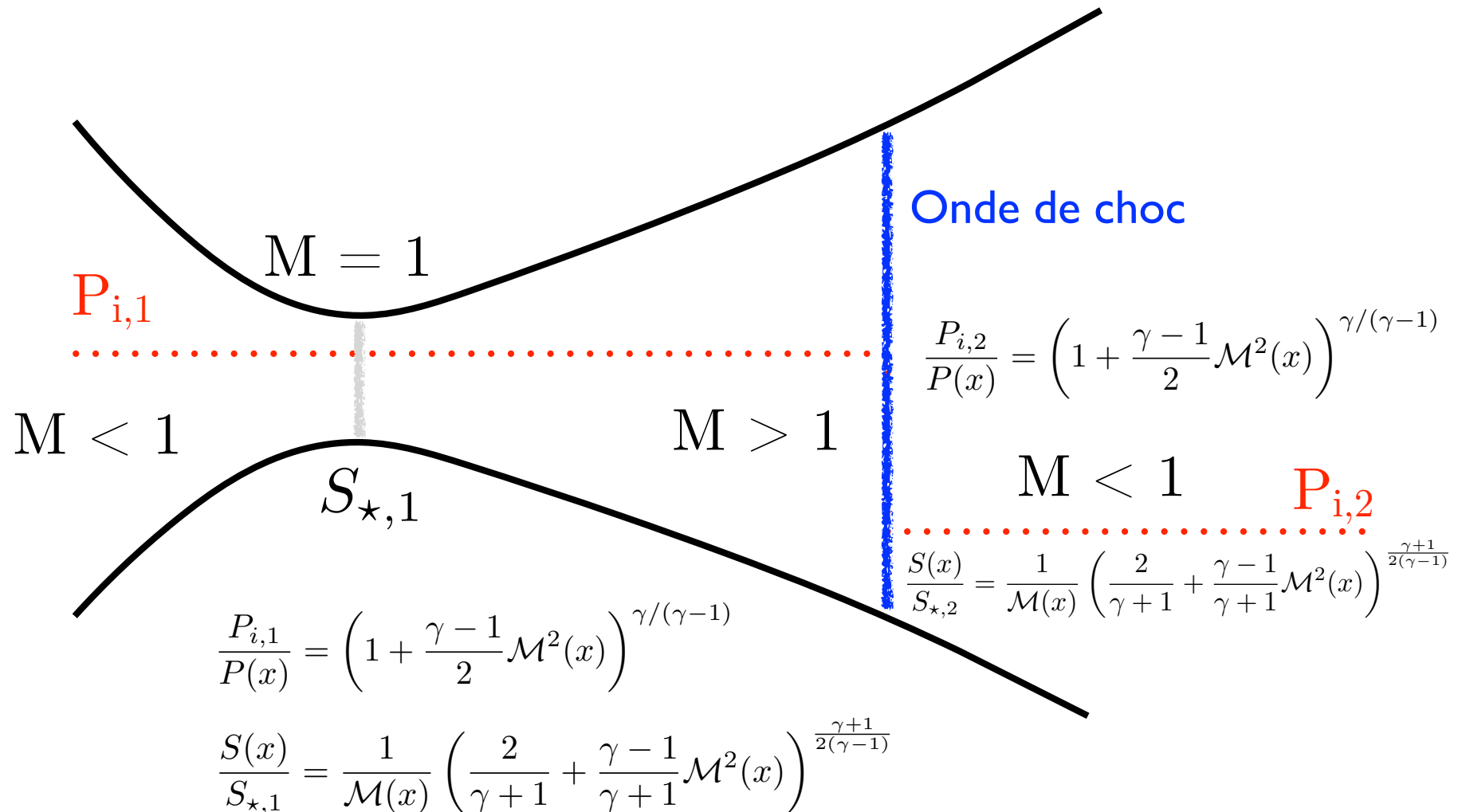
7. Dimensionnement d'une tuyère

- Dans le cas où la pression en sortie est accordée avec celle de l'écoulement supersonique dans le divergent, il n'y a qu'une seule référence isentropique pour l'écoulement.



7. Dimensionnement d'une tuyère

- Dans le cas où la pression en sortie est plus grande que celle de l'écoulement supersonique dans le divergent, il y a deux références isentropiques pour l'écoulement :



7. Dimensionnement d'une tuyère

- Si la pression P_i est égale à la pression en sortie de la tuyère ($P_i = P_o$), sans gradient de pression il n'y a pas d'écoulement et le débit est nul.
- Pour $P_i > P_o$, un écoulement s'organise :
 - Tant que la pression au col est supérieure à la pression critique ($0.528 P_i$), l'écoulement reste subsonique sur toute la tuyère et débit peut augmenter avec P_i et la vitesse dans la tuyère
 - Quand la pression au col diminue à $0.528 P_i$, le débit est bloqué à son maximum.

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Une tuyère convergente-divergente est donc un débitmètre parfait une fois que $\text{Mach} = 1$ au col
- $\text{Mach} = 1$ au col : la tuyère est 'amorcée'

$$\dot{Q}_m = \rho(x)u(x)S(x) = \rho(x)\mathcal{M}(x)c(x)S(x)$$

$$= \frac{\rho(x)}{\rho_i} \mathcal{M}(x) \left(\gamma r \frac{T}{T_i} T_i \right)^{1/2} \rho_i S(x)$$

$$= \frac{\rho(x)}{\rho_i} \mathcal{M}(x) \left(\frac{T}{T_i} \right)^{1/2} c_i \rho_i S(x)$$

$$= \frac{\rho(x)}{\rho_i} \mathcal{M}(x) \left(\frac{T}{T_i} \right)^{1/2} \gamma \frac{P_i}{c_i} S(x)$$

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Quand Mach = 1 au col, la condition est critique au col :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{m_{\star}} &= \frac{\rho_{\star}}{\rho_i} \left(\frac{T_{\star}}{T_i} \right)^{1/2} \gamma \frac{P_i}{c_i} S_{\star} \\ &= \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \gamma \frac{P_i}{c_i} S_{\star} \\ &= \gamma \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}} \underbrace{\frac{P_i}{c_i}}_{\substack{\text{Condition de réservoir/} \\ \text{isentropique}}} \underbrace{S_{\star}}_{\text{Surface du col}}\end{aligned}$$

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Le débit dans une tuyère amorcée (Mach = 1 au col) est donc fixé par la relation :

$$\dot{Q}_{m_{\star}} = \Psi_{\star} \left(\frac{P_i}{c_i} \right) S_{\star}$$
$$\Psi_{\star} = \gamma \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(1 - \gamma)}}$$

- Une fois la condition de réservoir fixée, il n'existe qu'un seul couple débit-surface au col qui permet d'avoir Mach = 1 au col (tuyère amorcée).
- Une tuyère amorcée est donc un débitmètre parfait.

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Une tuyère qui est en mesure de vérifier $\text{Mach} = 1$ au col, doit respecter une forme déterminée de rapport S/S_*

$$\dot{Q}_{m_*} = \rho(x)u(x)S(x) = \rho(x)\mathcal{M}(x)c(x)S(x) = \rho_*c_*S_*$$

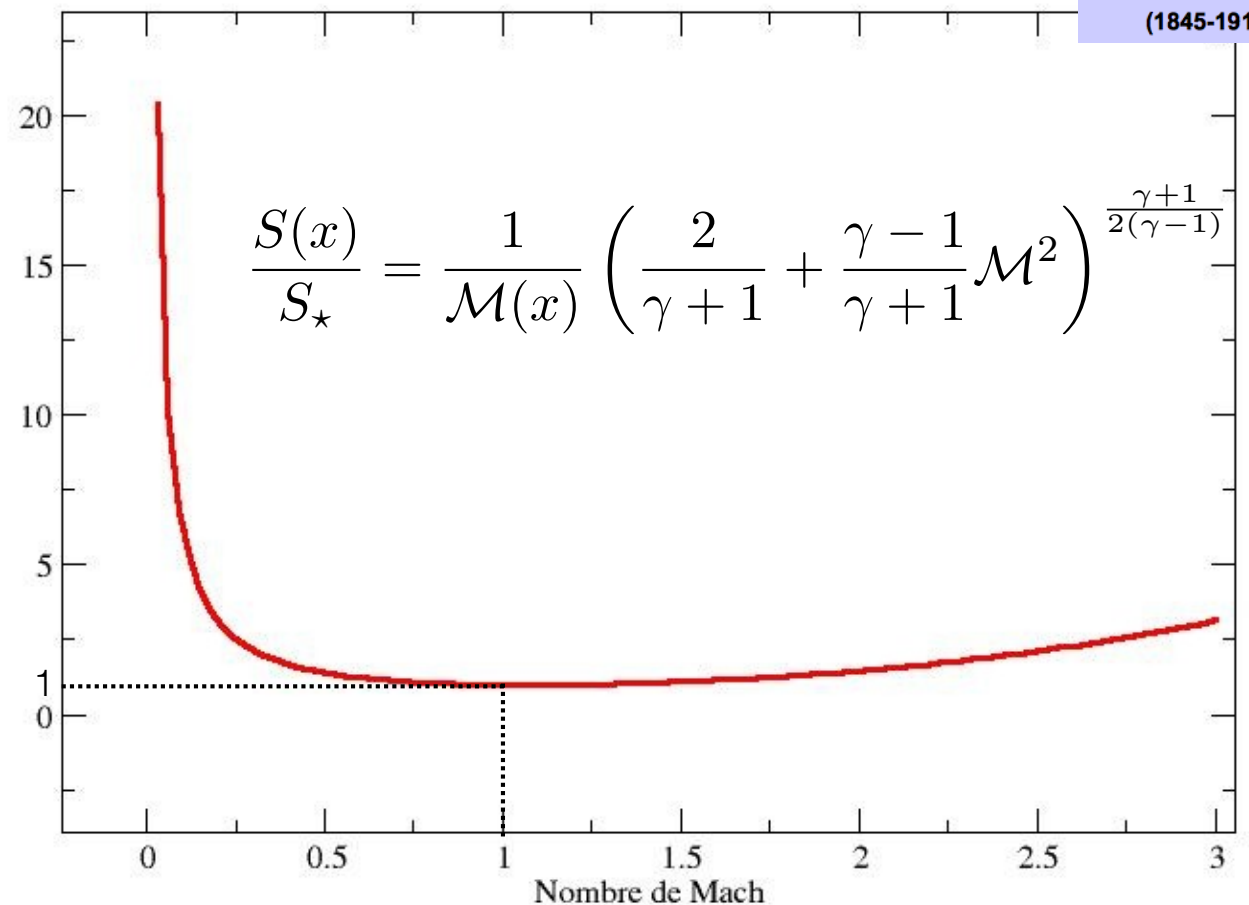
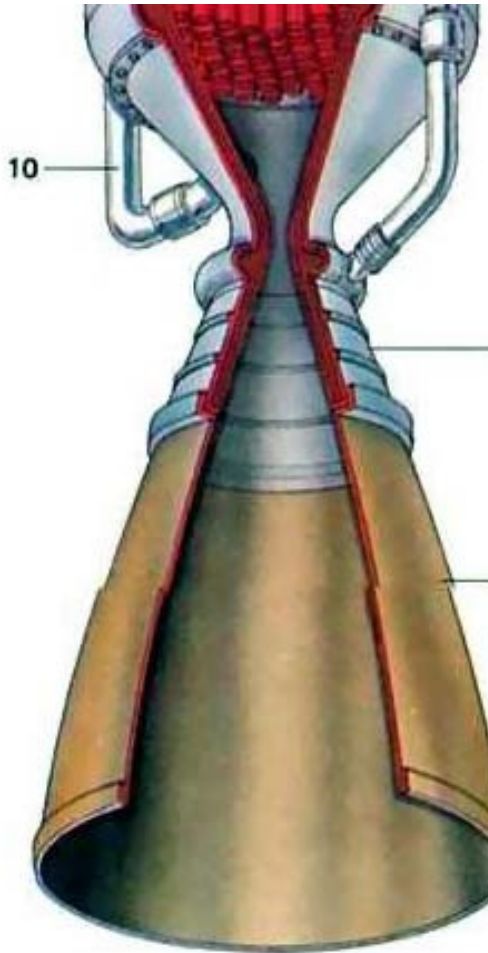
$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{S_*} &= \frac{\rho_*}{\rho(x)} \frac{c_*}{c(x)} \frac{1}{\mathcal{M}(x)} = \frac{\rho_*}{\rho(x)} \left(\frac{T_*}{T(x)} \right)^{1/2} \frac{1}{\mathcal{M}(x)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}(x)} [G(\mathcal{M})]^{\frac{1}{\gamma-1}} [G(\mathcal{M})]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathcal{M}(x)} [G(\mathcal{M})]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}(x)} \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \mathcal{M}^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\end{aligned}$$

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Une seule forme possible une fois fixées la surface au col et la distribution axiale de Mach



Carl Gustav de Laval
(1845-1913)



7. Dimensionnement d'une tuyère



7. Dimensionnement d'une tuyère

- Moteur F1 - Saturne 5 :

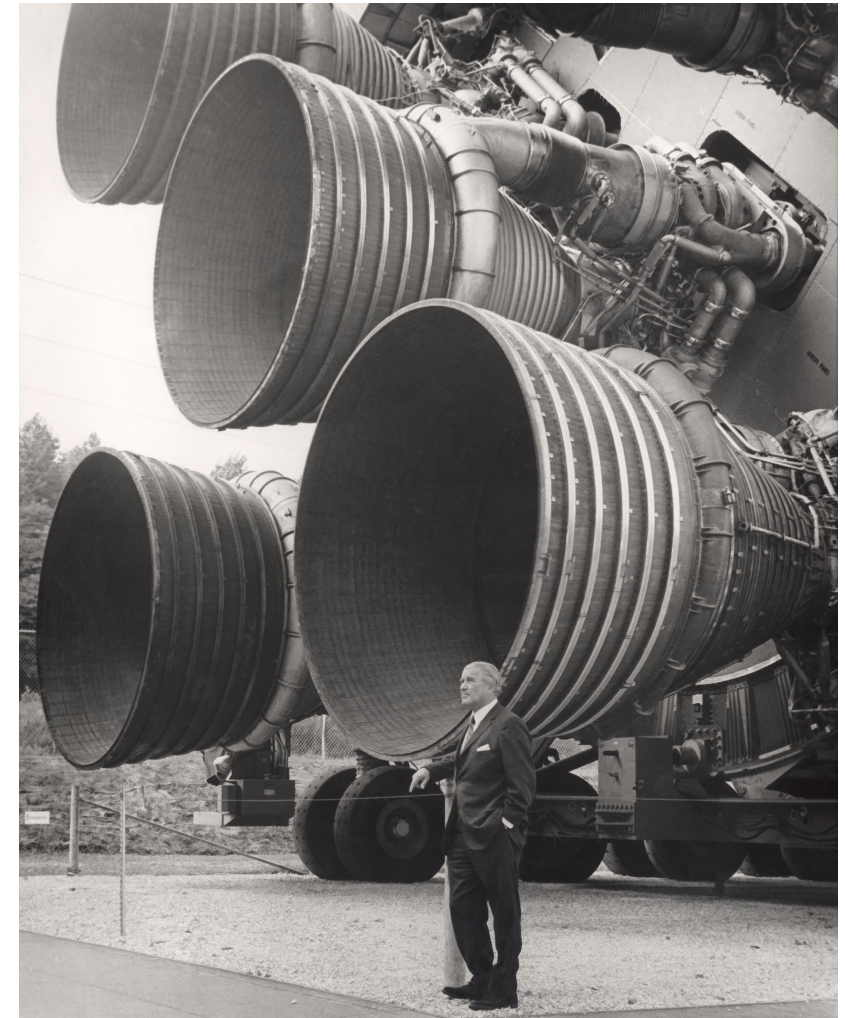
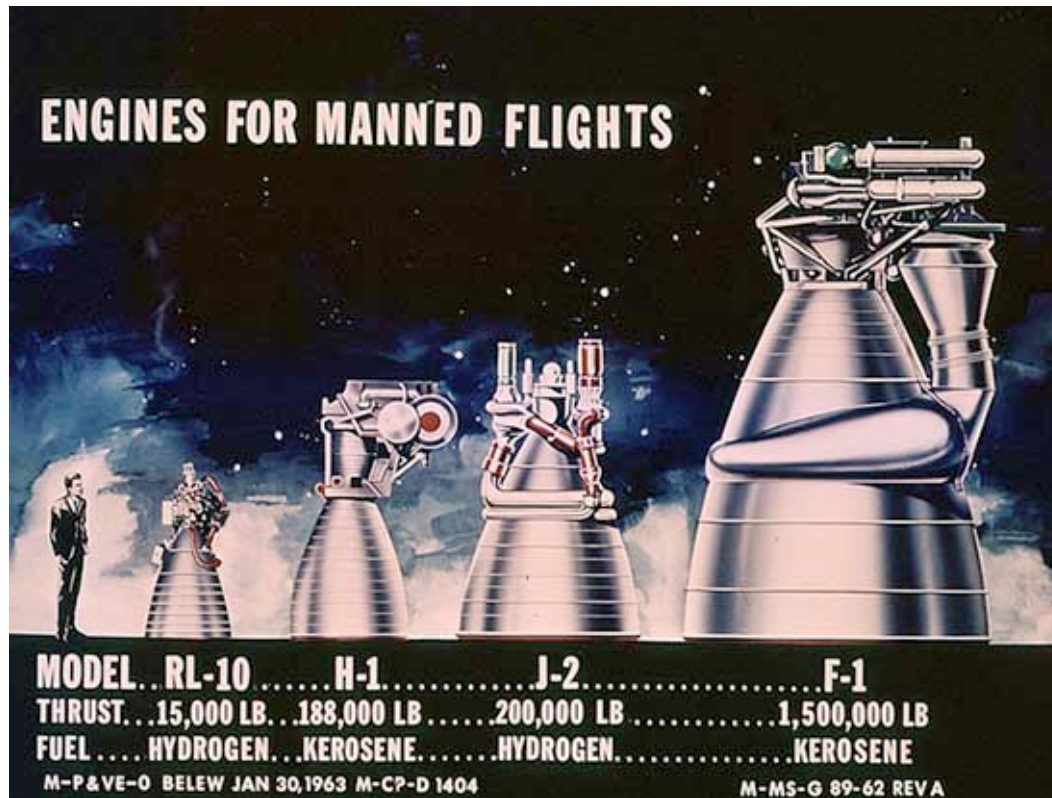
- ✓ 40 000 000 N

- ✓ 2750 m/s

- ✓ 110 GW



7. Dimensionnement d'une tuyère



- Hauteur : 5,8 m
- Envergure : 3,7 m
- Poids à sec : 8 391 kg
- Température de combustion : 3 298 degrés centigrades
- Poussée (niveau mer) : 690 368 kg
- Durée de combustion : 150 s jusqu'à [Apollo 9](#), 165 s ensuite
- Puissance : 32 millions de [chevaux-vapeur](#) (23 800 MW)
- Consommation : 2 720 kg de [kérosène](#) et d'[oxygène liquide](#) par seconde¹

7. Dimensionnement d'une tuyère

- Si la loi d'évolution de la surface fonction de la position axiale est fixée, plusieurs distributions de cette surface, i.e. formes, sont possibles :
 - ✓ Conique ;
 - ✓ Cloche ;
 - ✓ Linéaire ou annulaire.

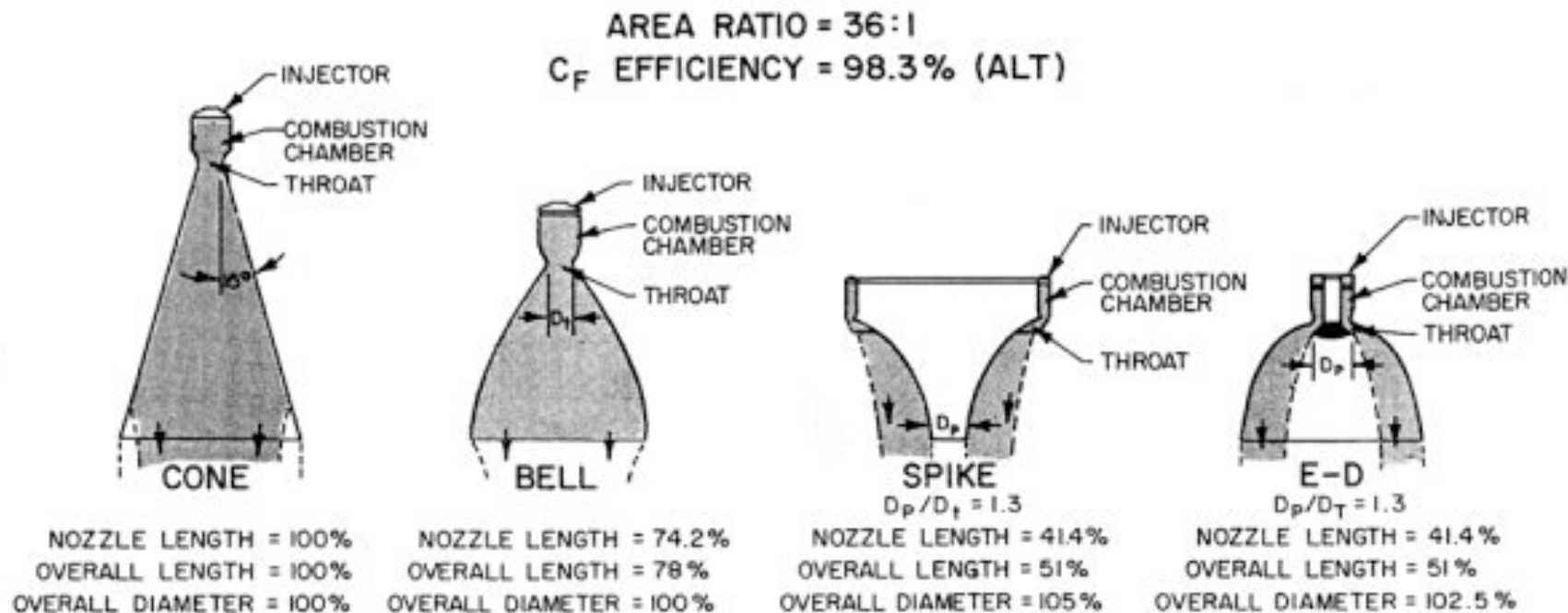
Comparison of Optimal Nozzles (source: Huzel & Huang, 1967)

E-D: Expansion-Deflection

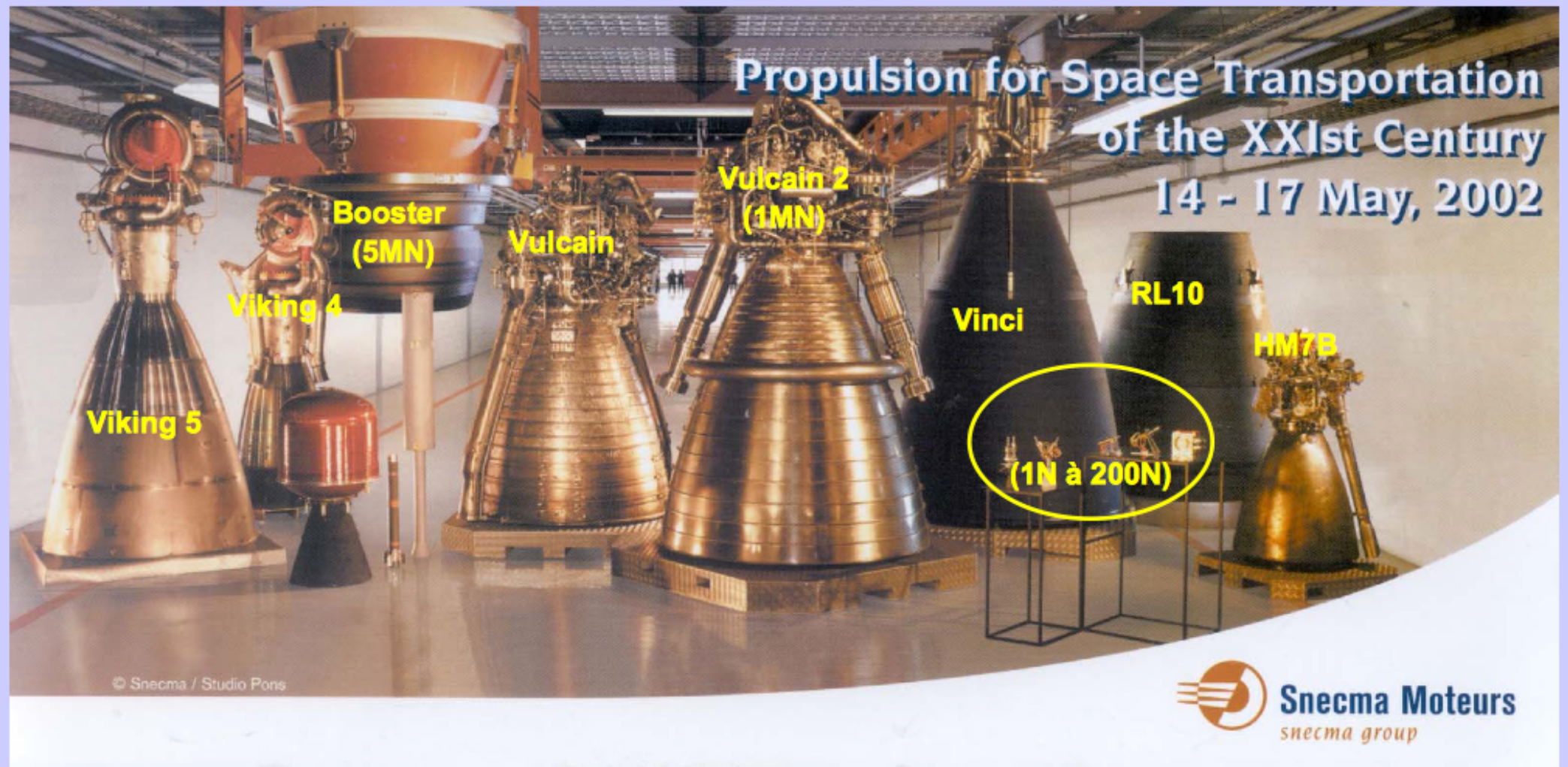
Spike: "Plug"

R-F: Reverse Flow

H-F: Horizontal Flow

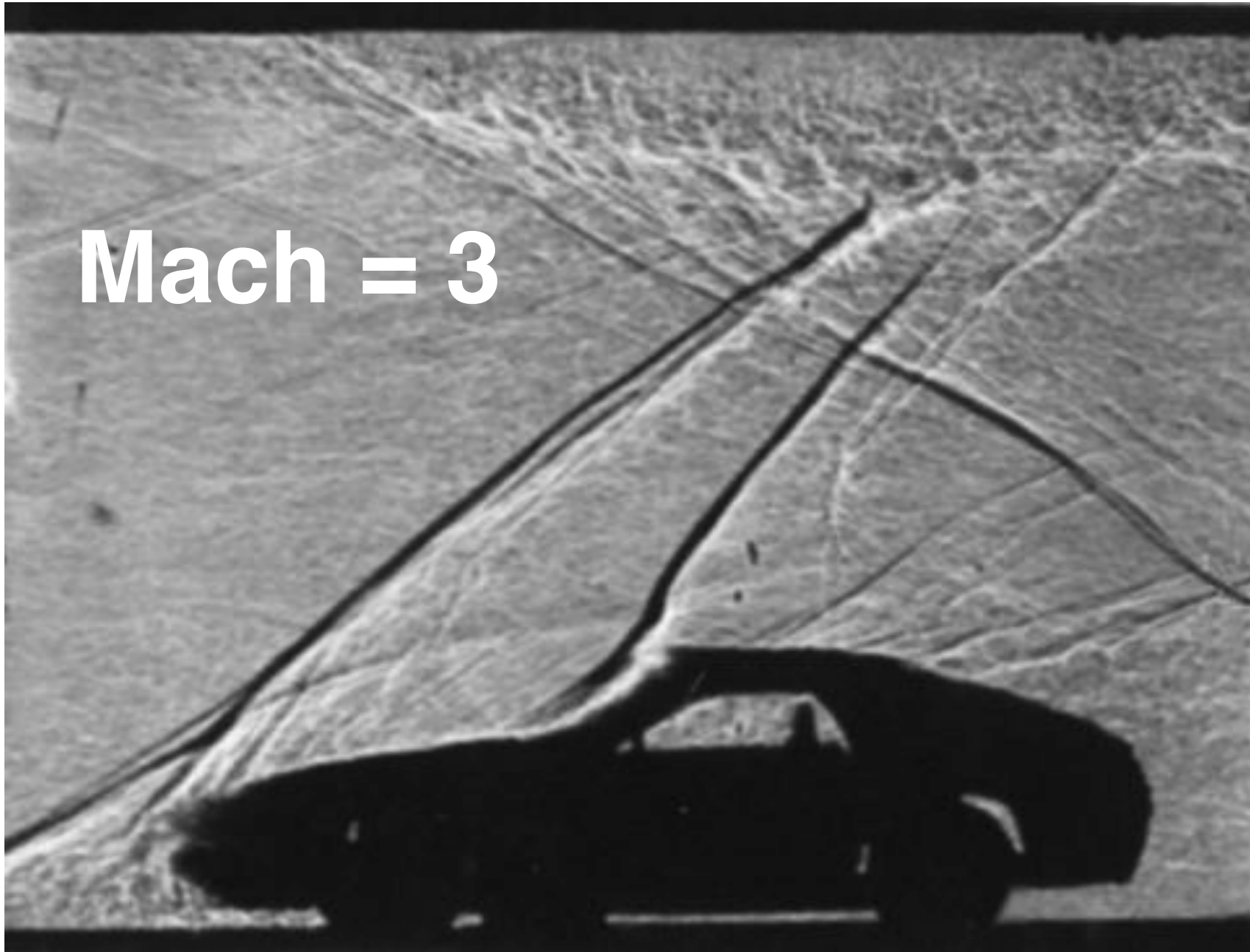


7. Dimensionnement d'une tuyère

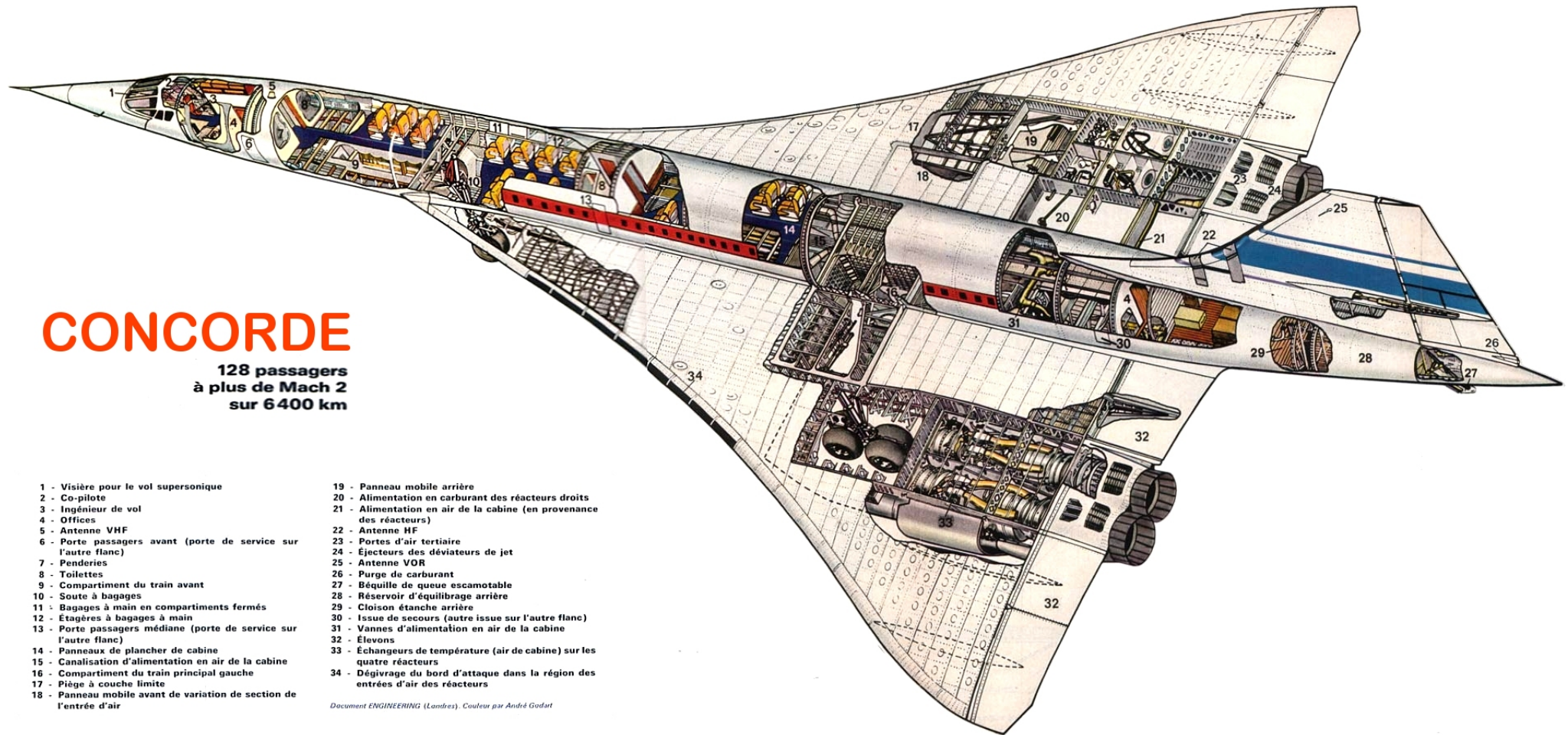


8. Ondes de choc

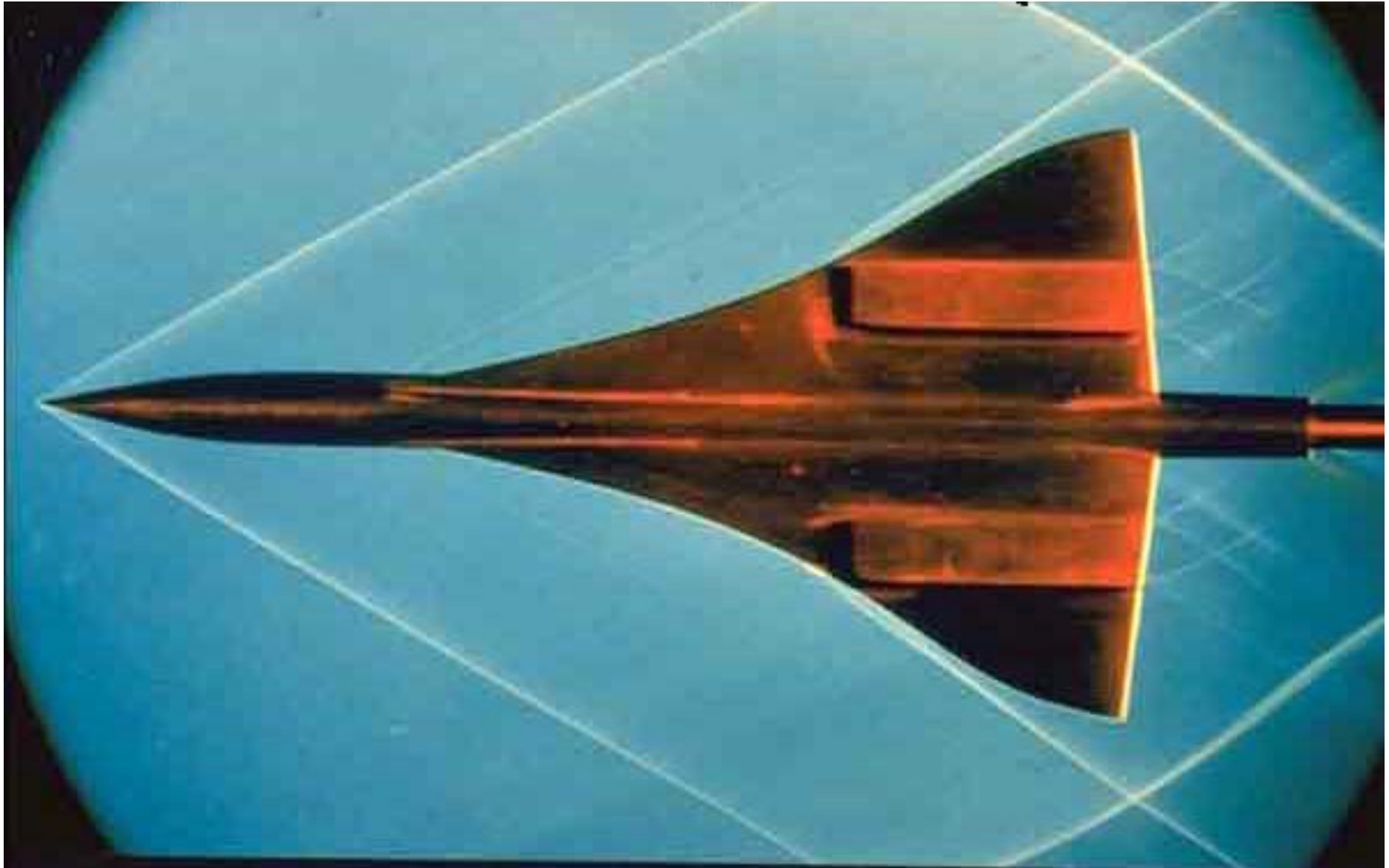
Mach = 3



8. Ondes de choc



8. Ondes de choc



8. Ondes de choc

- Le 14 octobre 1947, Chuck Yeager aux commandes d'un Bell XSI fut le premier à passer la barrière sonique.

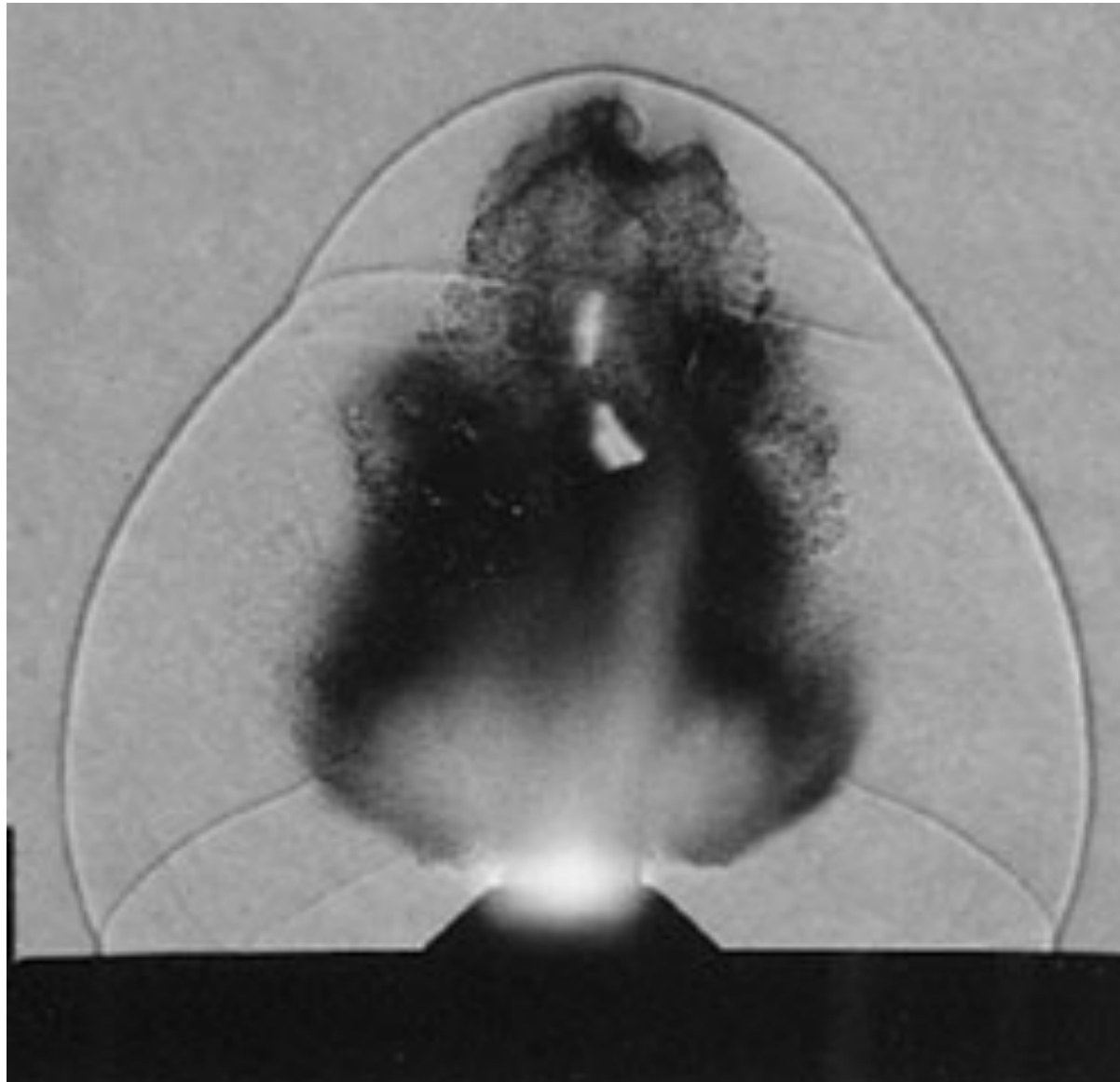


8. Ondes de choc



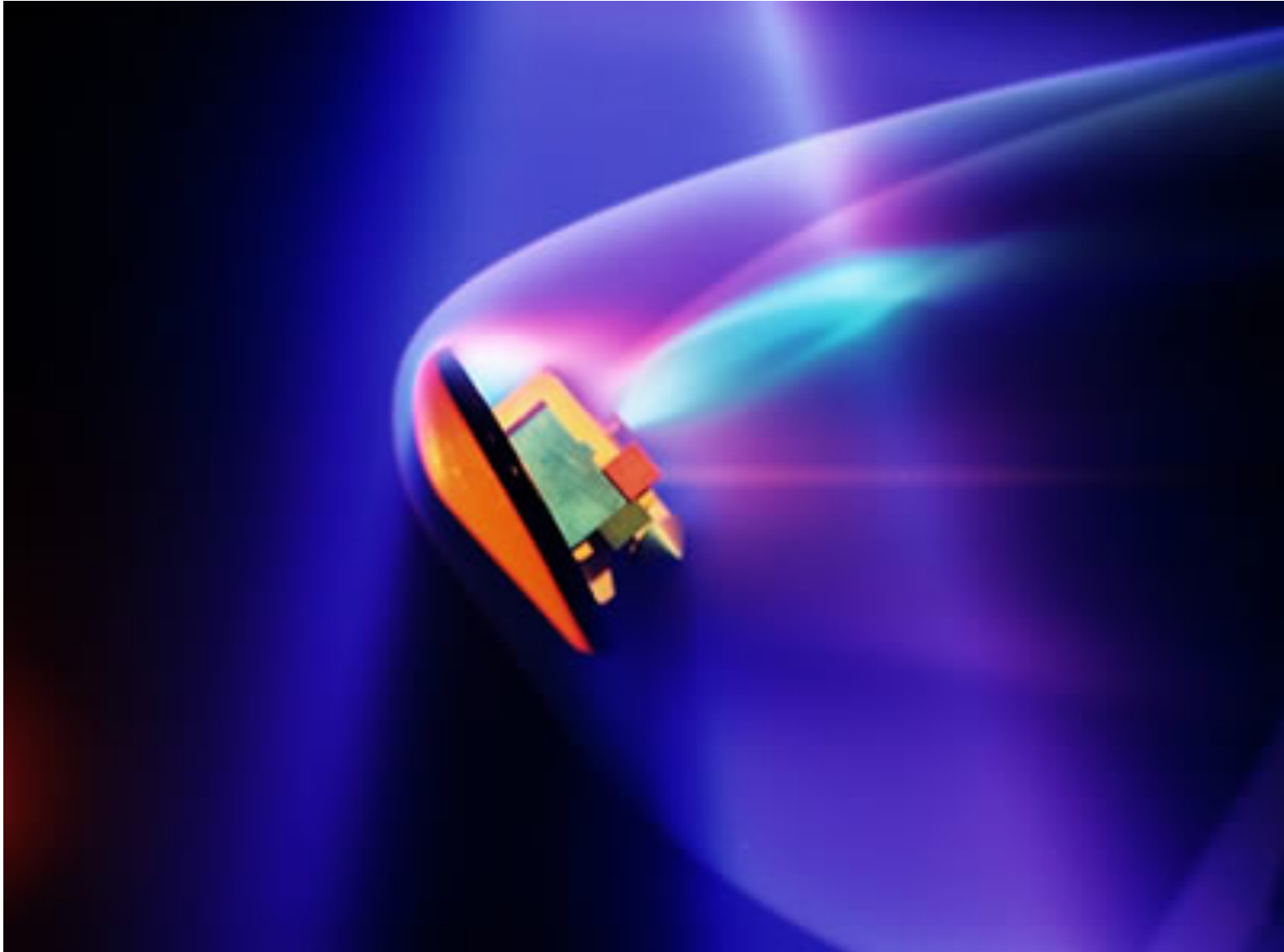
8. Ondes de choc

- Explosion



8. Ondes de choc

- Entrée dans une atmosphère à grande vitesse :



8. Ondes de choc

- Une onde de choc est une discontinuité de pression qui se propage.
- Le gaz est comprimé sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen des molécules.
- La mécanique des fluides en formulation macroscopique (Navier-Stokes) n'est donc pas valide à l'intérieur du choc. Mais reste valide de chaque côté de l'interface, avec des conditions de saut (conservation masse, QDM et énergie totale).
- Le gaz est réorganisé au niveau moléculaire, un choc n'est donc pas isentropique.
- L'énergie reste toutefois conservée à la traversée du choc.
- Un choc est donc adiabatique (conservation de l'énergie du système 'choc') et non-isentropique (transformation de l'énergie mécanique en énergie interne de façon irréversible).

8. Ondes de choc

- Une onde de choc est une discontinuité de pression qui se propage ou qui est stabilisée par un écoulement incident :

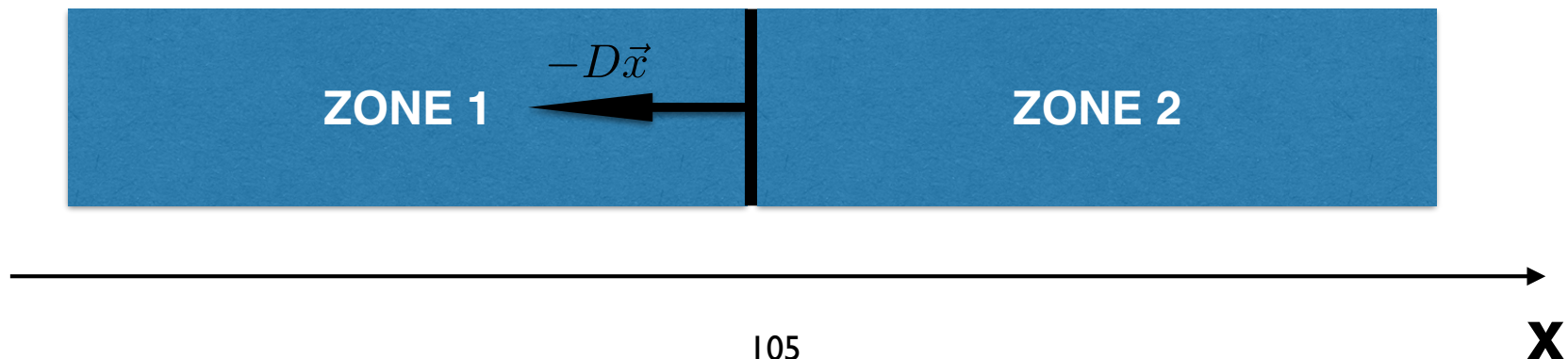
$$\vec{u}_{g1} = -D\vec{x} + u_1\vec{x}$$

Vitesse des gaz dans le
repère fixe du laboratoire

Vitesse de déplacement
du choc dans le repère
fixe du laboratoire

Vitesse des gaz dans
le repère du choc

$$\vec{u}_{g2} = -D\vec{x} + u_2\vec{x}$$



8. Ondes de choc

- Pour un choc qui se propage dans un milieu au repos : $D = u_1$

Vitesse des gaz dans le
repère fixe du laboratoire

Vitesse de déplacement
du choc dans le repère
fixe du laboratoire

Vitesse des gaz dans
le repère du choc

$$\vec{u}_{g_1} = 0 = -D\vec{x} + u_1\vec{x}$$

$$\vec{u}_{g_2} = -D\vec{x} + u_2\vec{x} \neq 0$$

- Des relations de saut vont être obtenues dans le repère du choc pour u_1 et u_2

8.1 Ondes de choc droites

Choc droit Brusque recompression

$$\mathcal{M}_1 > 1$$

$$U_1$$

$$P_1$$

$$\rho_1$$

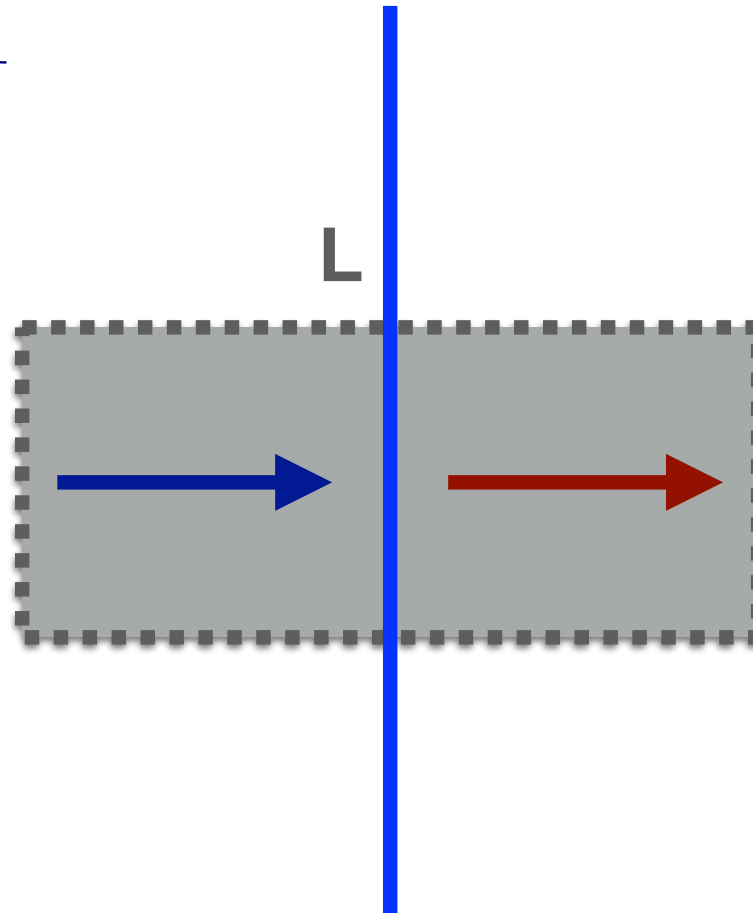
$$T_1$$

$$P_{i,1}$$

$$h_{i,1}$$

$$T_{i,1}$$

S



$$\mathcal{M}_2 < 1$$

$$U_2 < U_1$$

$$P_2 > P_1$$

$$\rho_2 > \rho_1$$

$$T_2 > T_1$$

$$P_{i,2} < P_{i,1}$$

$$h_{i,2} = h_{i,1}$$

$$T_{i,2} = T_{i,1}$$

Saut d'Entropie

$$ds \neq 0$$

Amont du choc

Ecoulement supersonique

Aval du choc

Ecoulement subsonique

8.1 Ondes de choc droites

- Nous pouvons écrire les lois de conservation pour le volume V , de section d'entrée et de sortie S et de longueur L , contenant le choc.
- Tout ce que nous avons écrit précédemment est valide, sauf les relations ayant utilisé l'isentropique.
- Conservation de la masse :

$$\rho_1 u_1 S = \rho_2 u_2 S$$

8.1 Ondes de choc droites

- Conservation de la QDM couplée à la conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \rho u \frac{du}{dx} &= - \frac{dP}{dx} \\ \frac{d\rho u^2}{dx} &= - \frac{dP}{dx} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Conservation masse :} \\ \frac{d\rho u}{dx} = 0 \end{array}$$
$$\frac{d}{dx} (\rho u^2 + P) = 0$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

8.1 Ondes de choc droites

- La quantité de mouvement se réorganise en fonction du nombre de Mach :

$$\mathcal{M} = \frac{u}{c} = \frac{u}{\sqrt{\gamma r T}} = u \sqrt{\frac{\rho}{\gamma P}}$$

$$\rho u^2 + P = P \left(1 + \rho u^2 / P \right) = P \left(1 + \gamma \mathcal{M}^2 \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma \mathcal{M}_1^2}{1 + \gamma \mathcal{M}_2^2}$$

**La pression
augmente à la
traversée du choc**

8.1 Ondes de choc droites

- Conservation de l'énergie :

$$T_{i,1} = C_P T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = C_P T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 = \boxed{T_{i,2} = T_{i,1}}$$

- Comme pour la QDM, en faisant intervenir le Mach :

$$C_P T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{C_p T} \right) = C_P T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_2^2 \right)}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_1^2 \right)}$$

La température augmente à la traversée du choc

8.1 Ondes de choc droites

- Revenons à la QDM :

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

- D'après la conservation de la masse ($\rho \times u = \text{cst}$):

$$\frac{P_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{P_2}{\rho_2 u_2} + u_2$$

$$\frac{c_1^2}{\gamma u_1} - \frac{c_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1$$

8.1 Ondes de choc droites

- Nous avons montré plus haut la relation suivante entre la vitesse du son et la vitesse du son critique :

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}c_{\star}^2$$

- Ou encore :

$$c^2 = \frac{\gamma + 1}{2}c_{\star}^2 - \frac{\gamma - 1}{2}u^2$$

- La vitesse du son critique a été définie à partir de la conservation de l'énergie (c'est en fait une façon d'exprimer la totalité de l'énergie), elle est donc constante à la traversée du choc.

8.1 Ondes de choc droites

- Cette dernière expression est introduite dans la relation entre la vitesse du son et la vitesse obtenue à partir de la QDM :

$$\frac{c_1^2}{\gamma u_1} - \frac{c_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_\star^2}{\gamma u_1} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_1 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_\star^2}{\gamma u_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_2 = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_\star^2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_2 - u_1) = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{c_\star^2}{u_1 u_2} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$$

8.1 Ondes de choc droites

- D'où la relation de Prandtl :

**Produit des
vitesses de part et
d'autre du choc**

$$c_{\star}^2 = u_1 u_2$$

**Vitesse du son
critique**

- Ou encore, en terme de Mach critique :

$$\mathcal{M}_{\star,1} \times \mathcal{M}_{\star,2} = 1$$

8.1 Ondes de choc droites

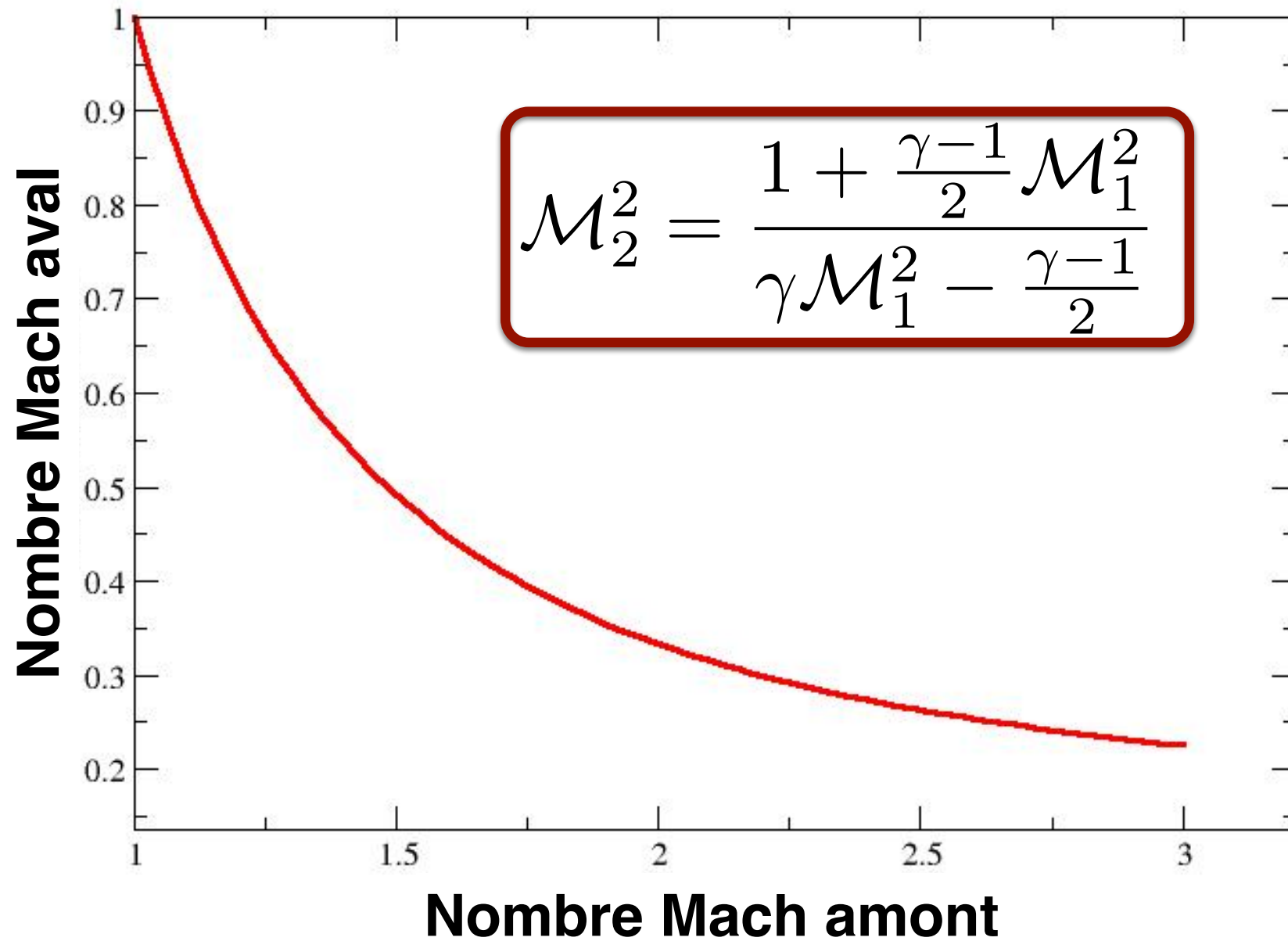
- En utilisant la relation entre Mach et Mach critique démontrée plus haut :

$$\mathcal{M}_*^2 = \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}^2}{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}^2}$$

$$\frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}_2^2}{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_2^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2}{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2}$$

$$\mathcal{M}_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathcal{M}_1^2}{\gamma\mathcal{M}_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}$$

8.1 Ondes de choc droites



8.1 Ondes de choc droites

- A partir de la relation de Prandtl et de l'expression du Mach critique en fonction du Mach, on trouve :

$$c_{\star}^2 = u_1 u_2$$

$$\mathcal{M}_{\star}^2 = \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}^2}{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}^2}$$

$$\frac{c_{\star}^2}{u_2^2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\mathcal{M}_{\star,2}^2} = \mathcal{M}_{\star,1}^2$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2}{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

8.1 Ondes de choc droites

- Pour trouver le rapport de pression, il faut revenir à la conservation de la QDM (section constante), couplée à la conservation de la masse et en utilisant l'expression de u_2/u_1 :

$$P_2 - P_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2)$$

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 = \frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$$

$$= \gamma \mathcal{M}_1^2 \left(1 - \frac{2 + (\gamma - 1) \mathcal{M}_1^2}{(\gamma + 1) \mathcal{M}_1^2} \right)$$

$$= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (\mathcal{M}_1^2 - 1)$$

8.1 Ondes de choc droites

- D'où :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (\mathcal{M}_1^2 - 1)$$

- La température est obtenue à partir des sauts de pression et de densité en fonction du nombre de Mach :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

8.1 Ondes de choc droites

- D'où pour le rapport de température à la traversée du choc :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

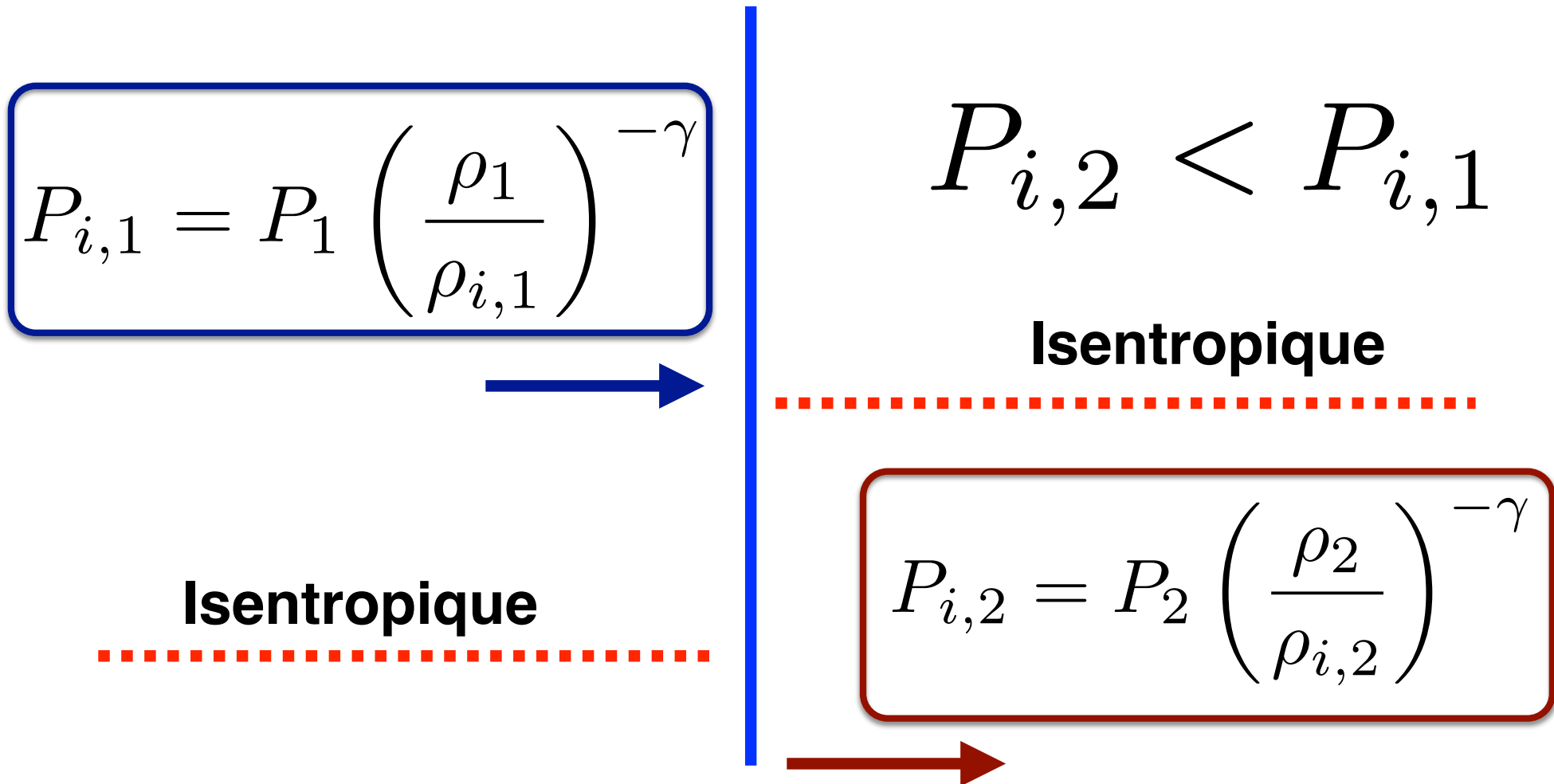
8.1 Ondes de choc droites

- L'enthalpie totale est conservée à la traversée du choc, elle est simplement réorganisée avec une augmentation de l'entropie.
- La température totale, isentropique ou de réservoir, qui est une mesure de l'enthalpie totale, est donc conservée à la traversée du choc :

$$T_{i,1} = T_{i,2}$$

8.1 Ondes de choc droites

Choc droit Brusque recompression



Saut d'Entropie
 $ds \neq 0$

8.1 Ondes de choc droites

- Le choc est une discontinuité d'entropie, avec conservation de l'énergie (température isentropique constante, évolution adiabatique).
- La pression totale ou isentropique n'est donc pas la même de chaque côté du choc.
- La pression isentropique représente la capacité à fournir un travail mécanique, la pression isentropique (totale ou de réservoir) diminue en aval du choc suite à la réorganisation de l'énergie :

$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} = \frac{\rho_{i,2}}{\rho_{i,1}} \quad (T_i \text{ constant})$$

$$= \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma} \left(\frac{\rho_{i,1}}{\rho_{i,2}} \right)^{-\gamma}$$

$$= \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma} \left(\frac{P_{i,1}}{P_{i,2}} \right)^{-\gamma}$$

$$P_{i,2} = P_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_{i,2}} \right)^{-\gamma}$$

$$P_{i,1} = P_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{i,1}} \right)^{-\gamma}$$

8.1 Ondes de choc droites

- D'où la relation entre les deux pressions totales :

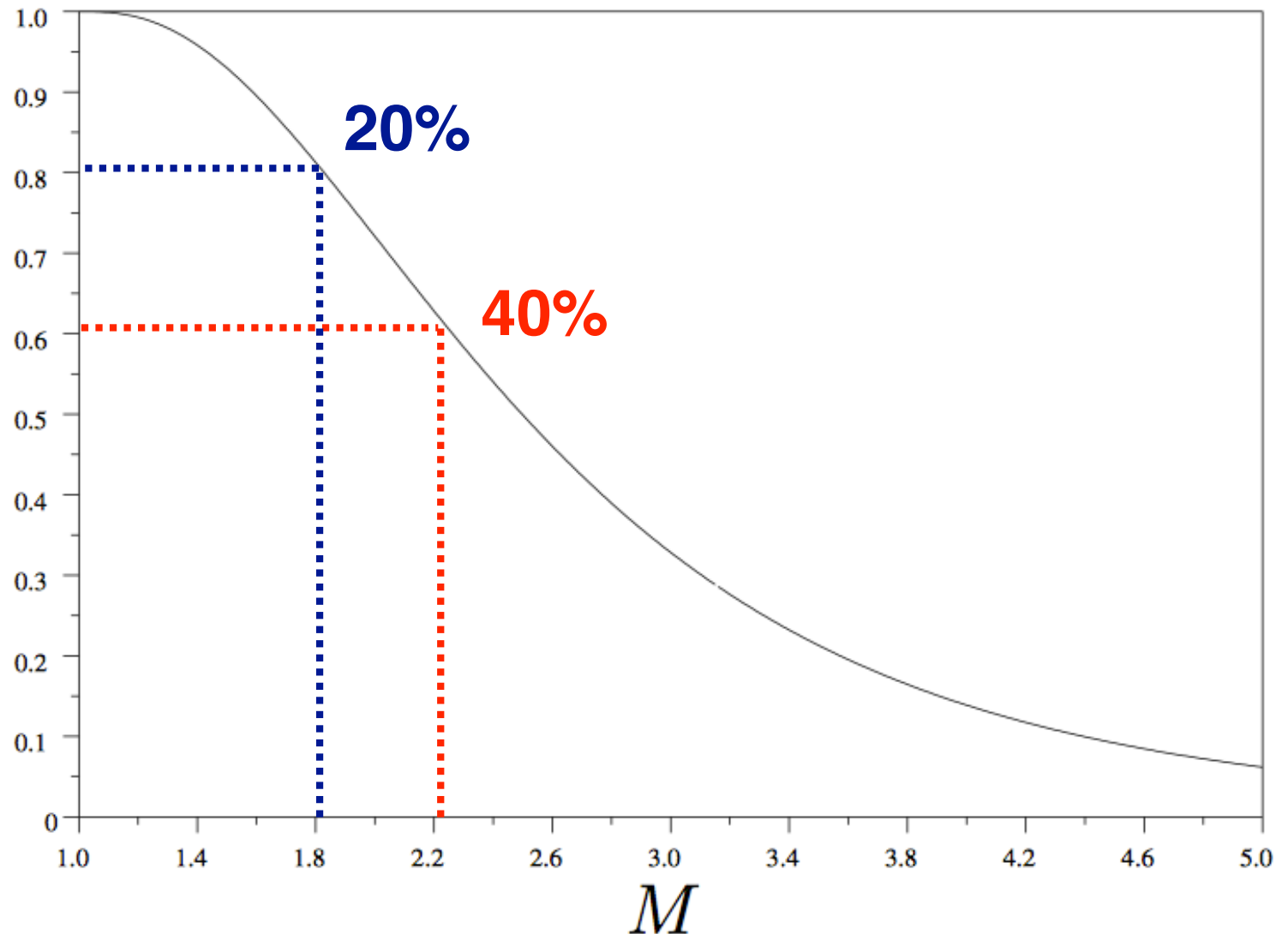
$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}} = \frac{\rho_{i,2}}{\rho_{i,1}} = \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

8.1 Ondes de choc droites

- La perte de pression totale (d'énergie) à travers un choc est conséquente et doit être compensée par le système propulsif :

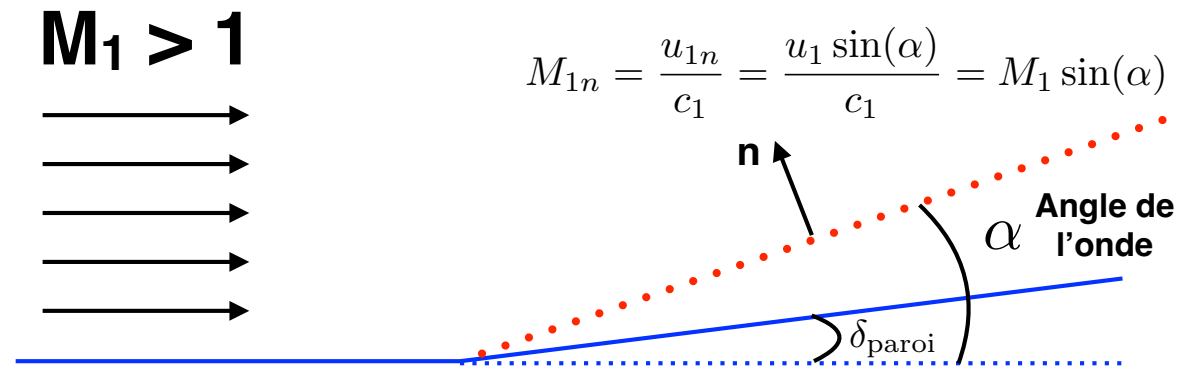
$$\frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$$



8.2 Ondes de choc obliques

- Dans la majorité des configurations pratiques, le choc n'est pas normal à l'écoulement incident.
- Quand un écoulement supersonique rencontre une paroi inclinée, la section disponible pour les lignes de courant diminue, la vitesse diminue et la pression augmente : on appelle cette géométrie générique 'une rampe de compression'.
- Avec la compression et la diminution de la vitesse, une onde de choc s'organise à partir du coin de la rampe.

8.2 Ondes de choc obliques



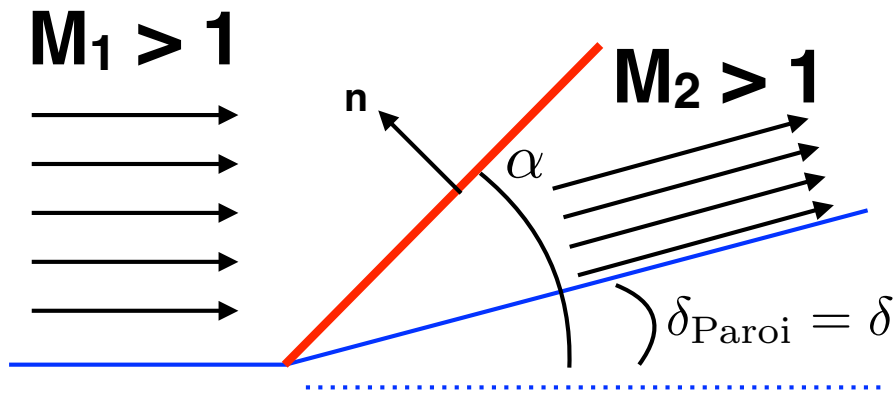
- Pour un angle faible de la rampe, une onde de Mach apparait et l'écoulement reste supersonique.
- L'onde de Mach se transforme en onde de choc quand le Mach amont dans la direction normale à l'onde devient plus grand que l'unité, ceci est possible à travers :
 - L'augmentation du Mach amont pour un angle de paroi fixé.
 - L'augmentation de l'angle de l'onde suite à l'augmentation de l'angle de la paroi.

8.2 Ondes de choc obliques

- Sous les conditions où un choc apparaît il existe deux possibilités :

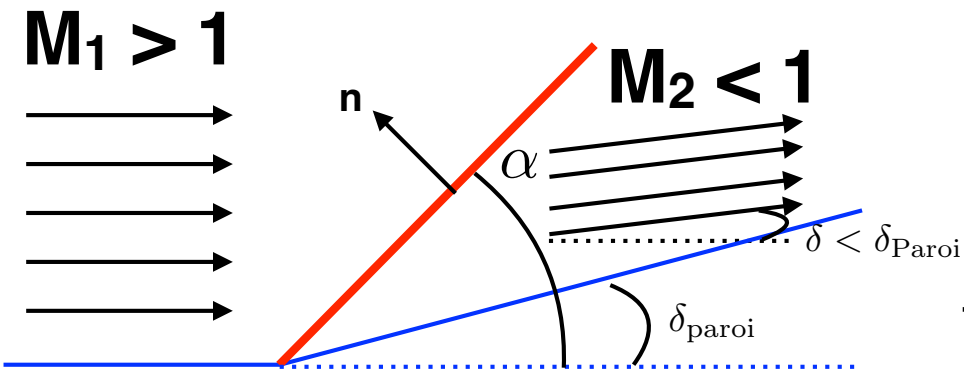
$$M_{1n} = M_1 \sin(\alpha)$$

$$M_{2n} = M_2 \sin(\alpha - \delta)$$



(i) Le Mach de l'écoulement derrière le choc oblique est supérieur à l'unité (seule la composante normale de la vitesse est subsonique).

Dans ce cas, l'écoulement est dévié derrière le choc par un angle égal à l'angle de la paroi, donc en suivant la paroi. Le choc oblique est alors dit 'faible'.

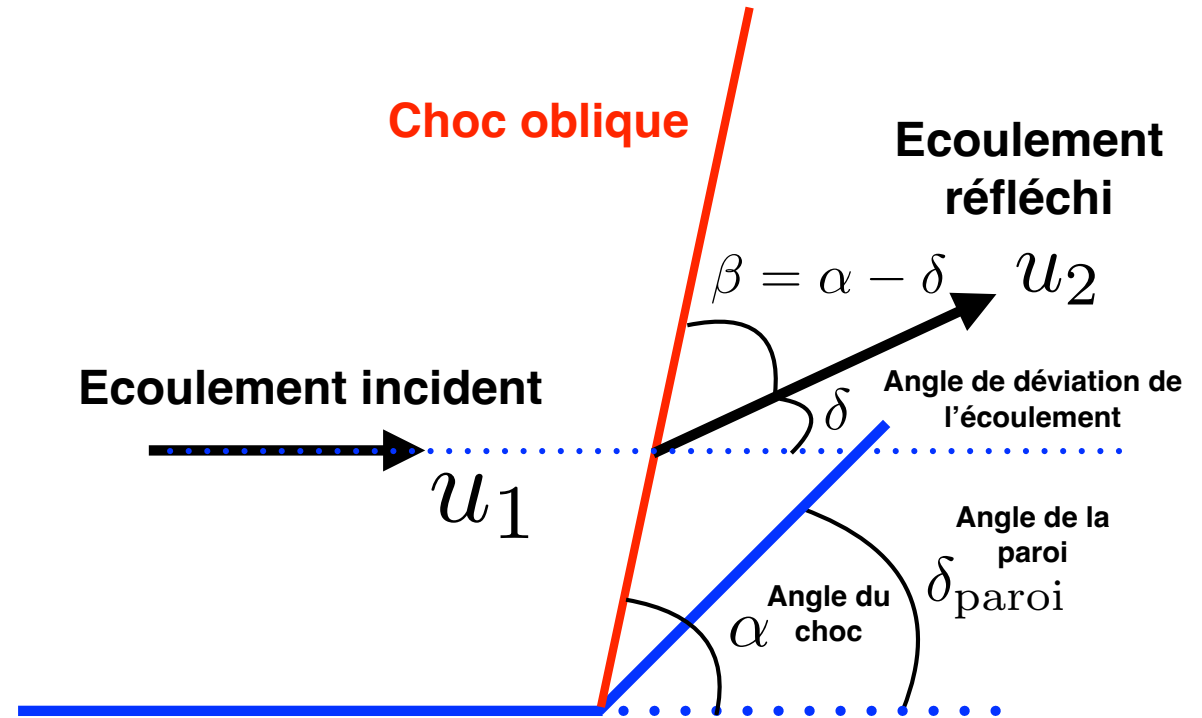
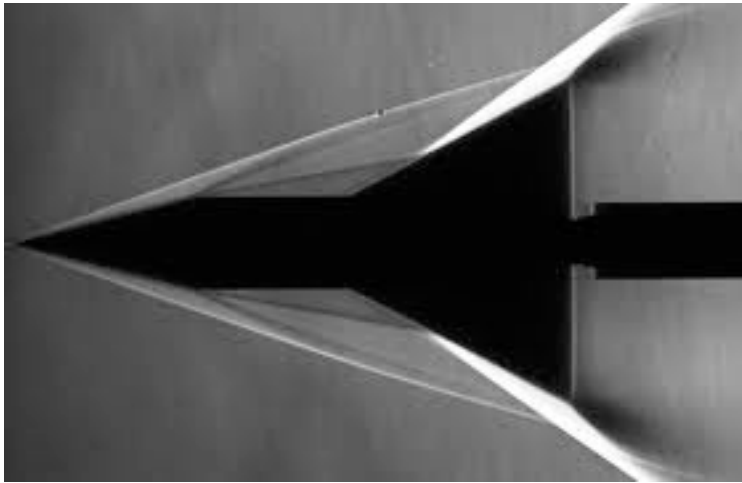


(ii) Le Mach de l'écoulement derrière le choc est inférieur à l'unité.

Dans ce cas l'écoulement est dévié derrière le choc oblique par un angle plus petit que l'angle de la paroi. L'écoulement est donc plus fortement comprimé, le choc oblique est alors dit 'fort'.

8.2 Ondes de choc obliques

- Cette onde de choc est oblique avec un angle par rapport à l'horizontal qui dépend de l'angle de la rampe et du nombre de Mach de l'écoulement incident



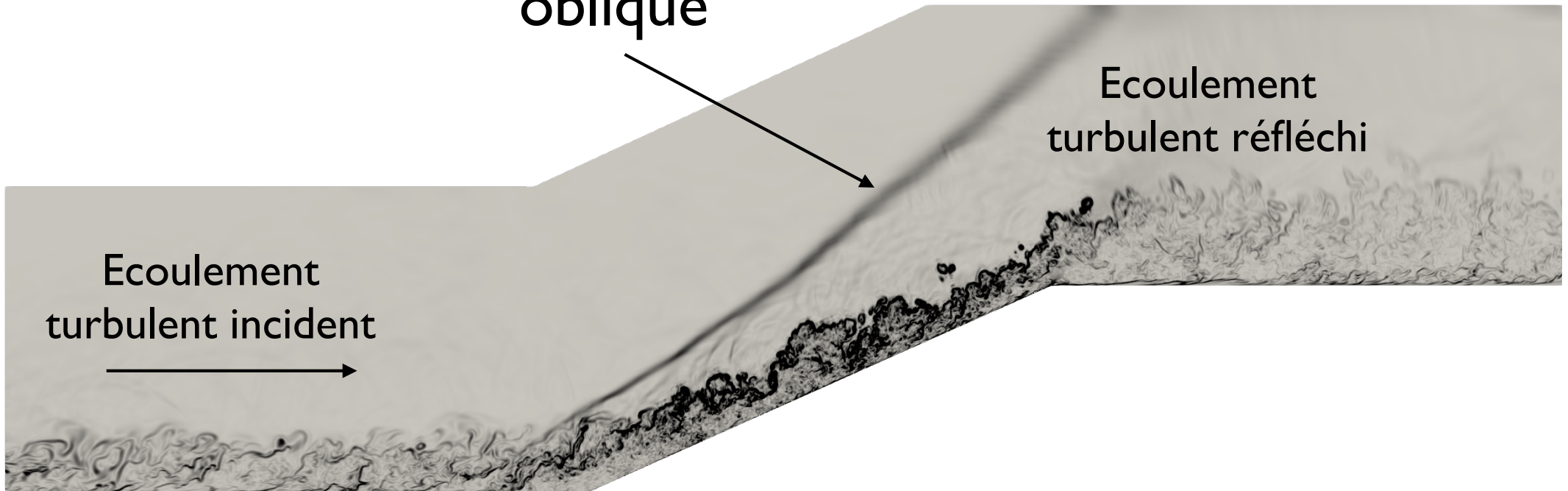
- Nous allons voir que l'angle de déviation n'est pas toujours égale à l'angle de la paroi
- Pour des petites inclinaisons du choc, la norme de la vitesse reste supersonique en aval du choc incliné et la déviation suit l'angle de la paroi.
- Pour de plus grandes inclinaisons (en allant vers le choc droit), l'écoulement est subsonique en aval du choc et l'écoulement est dévié avec un angle plus petit que celui de la paroi

8.2 Ondes de choc obliques

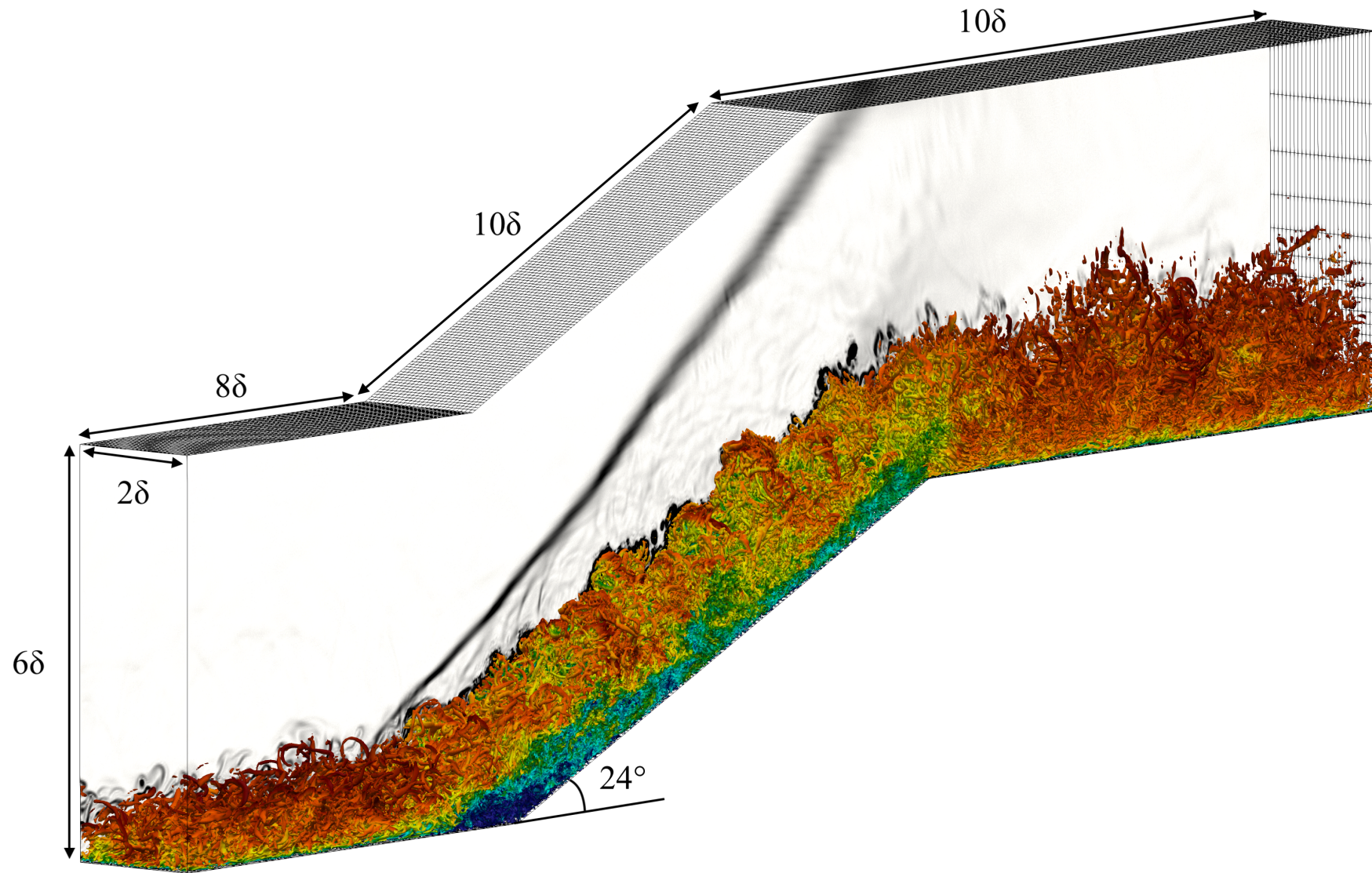
Onde de choc
oblique

Ecoulement
turbulent réfléchi

Ecoulement
turbulent incident

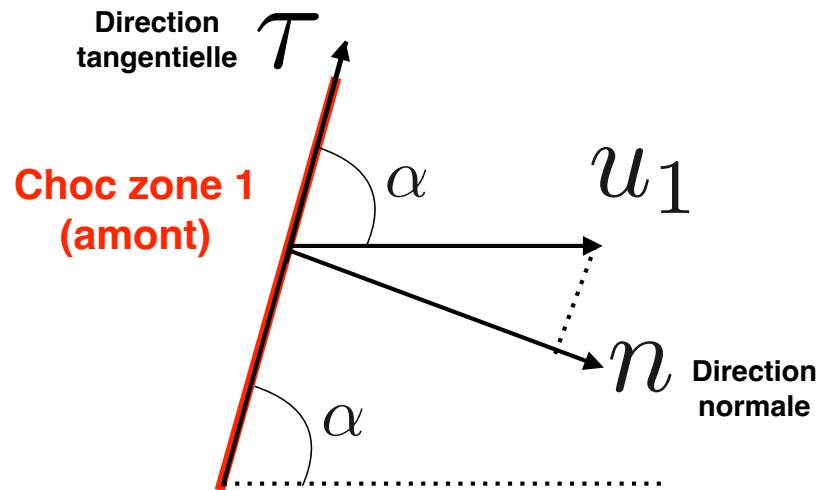


8.2 Ondes de choc obliques



8.2 Ondes de choc obliques

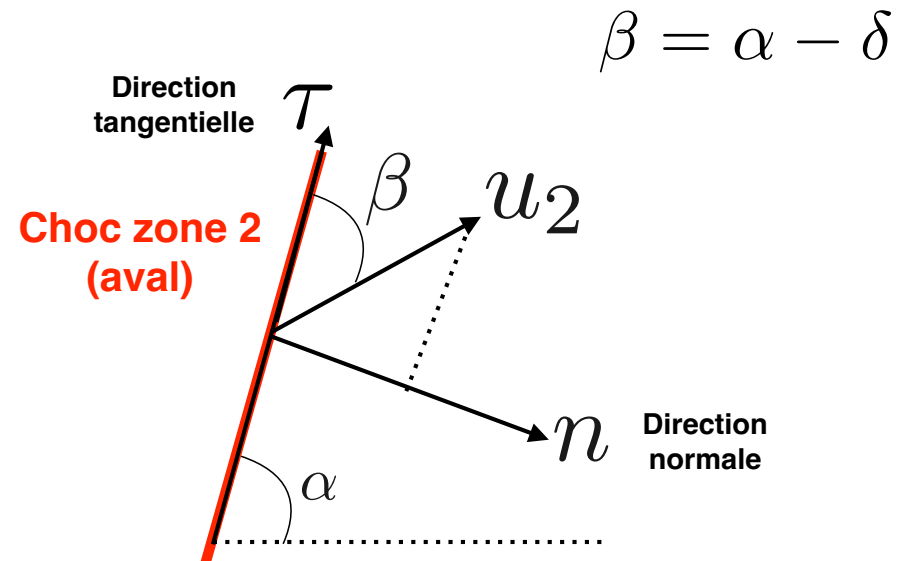
- La vitesse est projetée suivant les directions normale et tangentielle au choc :



$$\vec{u}_1 = u_{1n}\vec{n} + u_{1\tau}\vec{\tau}$$

$$u_{1\tau} = u_1 \cos(\alpha)$$

$$u_{1n} = u_1 \sin(\alpha)$$

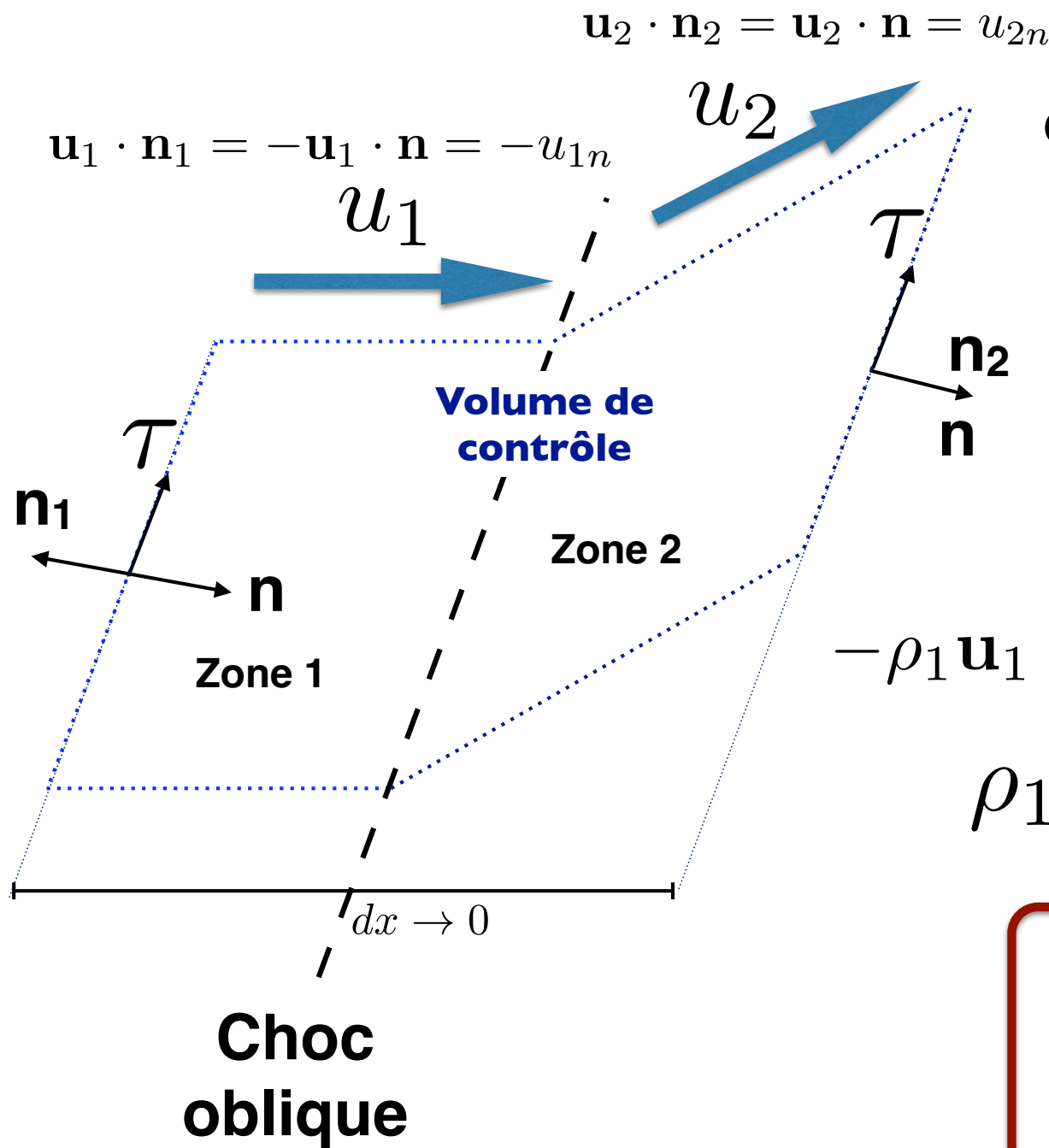


$$\vec{u}_2 = u_{2n}\vec{n} + u_{2\tau}\vec{\tau}$$

$$u_{2\tau} = u_2 \cos(\beta)$$

$$u_{2n} = u_2 \sin(\beta)$$

8.2 Ondes de choc obliques



Conservation masse
écoulement stationnaire

$$\int_{\partial V} d\dot{Q}_m = 0$$

$$\dot{Q}_{m1} + \dot{Q}_{m2} = 0$$

$$-\rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 S - \rho_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 S = 0$$

$$\rho_1 u_{1n} - \rho_2 u_{2n} = 0$$

Conservation masse

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}$$

8.2 Ondes de choc obliques

Conservation QDM écoulement stationnaire

$$-\int_{\partial V} \mathbf{u} d\dot{Q}_m = \int_{\partial V} \mathbf{u}(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{\partial V} P \mathbf{n} dS$$

Direction de projection (vecteur X produit scalaire cette équation)

Forme à projeter

$$-\mathbf{u}_1(-\rho \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)S - \mathbf{u}_2(-\rho \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)S = -P_1 \mathbf{n}_1 S - P_2 \mathbf{n}_2 S$$

$$-\mathbf{u}_1 \rho_1 u_{1n} + \mathbf{u}_2 \rho_2 u_{2n} = -P_1 \mathbf{n}_1 - P_2 \mathbf{n}_2$$

Direction de projection

Projection suivant n

$$-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \times \rho_1 u_{1n} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} \times \rho_2 u_{2n} = -P_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} - P_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}$$

$$\rho_1 u_{1n}^2 + P_1 = \rho_2 u_{2n}^2 + P_2$$

Projection suivant τ

$$-\mathbf{u}_1 \cdot \tau \times \rho_1 u_{1n} + \mathbf{u}_2 \cdot \tau \times \rho_2 u_{2n} = -P_1 \mathbf{n}_1 \cdot \tau - P_2 \mathbf{n}_2 \cdot \tau$$

$$\rho_1 u_{1\tau} u_{1n} = \rho_2 u_{2\tau} u_{2n}$$

$$u_{1\tau} = u_{2\tau}$$

Choc oblique

$dx \rightarrow 0$

Volume de contrôle

Zone 1

Zone 2

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = -u_{1n}$

$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = u_{2n}$

$\mathbf{n}_1$

$\mathbf{n}_2$

τ

τ

Conservation énergie

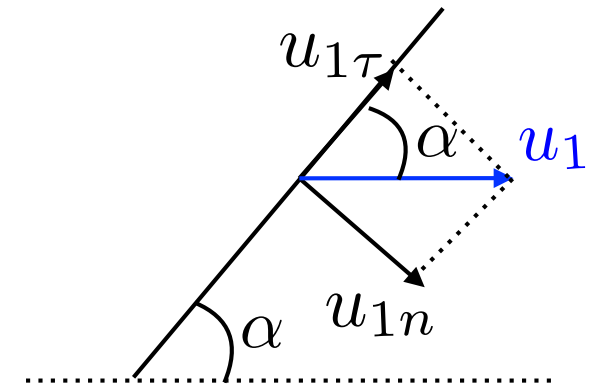
$$C_P T_1 + \frac{1}{2} (u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2) = C_P T_2 + \frac{1}{2} (u_{2n}^2 + u_{2\tau}^2)$$

8.2 Ondes de choc obliques

$$u_{2n} = u_{1n} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Recompression par} \\ \text{le choc} \\ \rho_2 > \rho_1 \end{array}$$

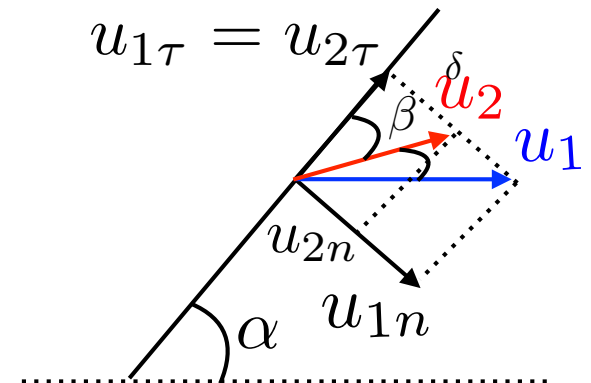
- Dans la direction normale au choc :

$$u_{2n} < u_{1n}$$



- Dans la direction tangentielle :

$$u_{2\tau} = u_{1\tau}$$



- Il y a donc bien une déviation de l'écoulement vers l'onde de choc

8.2 Ondes de choc obliques

- Dans la direction normale au choc, les relations obtenues pour les chocs droits sont toujours valables, il suffit de remplacer le Mach par le Mach calculé sur la composante normale :

$$M_{1n} = \frac{u_{1n}}{c_1} = \frac{u_1 \sin(\alpha)}{c_1} = M_1 \sin(\alpha)$$

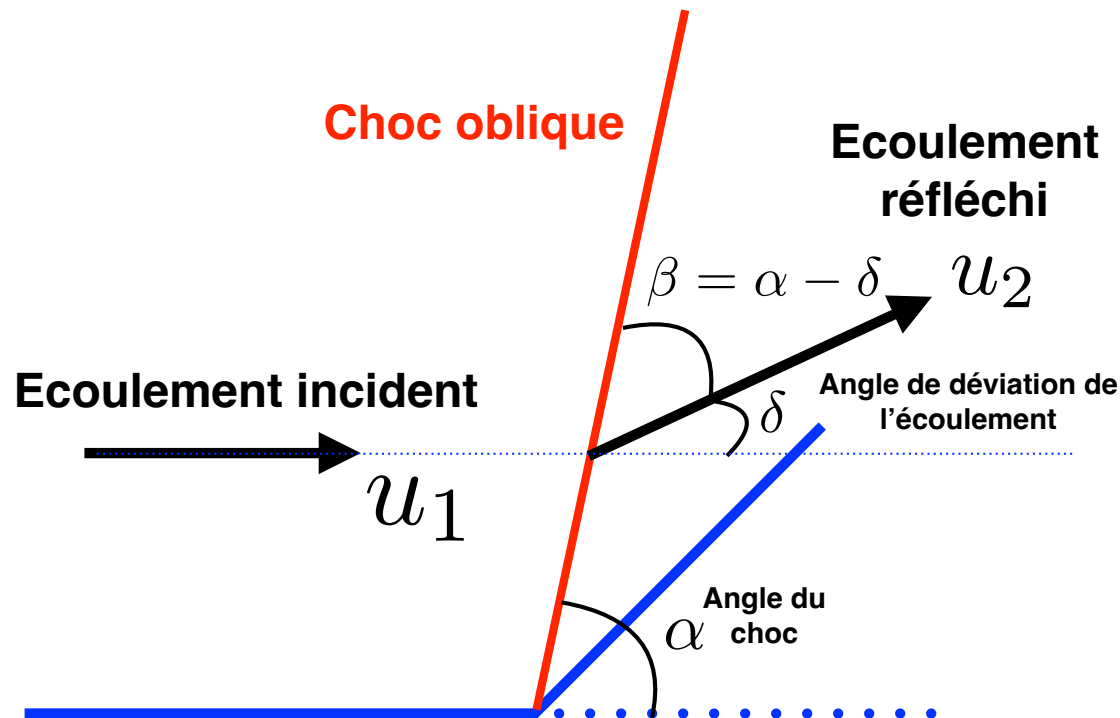
$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1n}^2 - 1)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{P_1}{P_2}$$

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)}$$

8.2 Ondes de choc obliques

- Le nombre de Mach en aval du choc oblique s'exprime en fonction de l'angle de déviation et de l'angle du choc :



$$\begin{aligned}
 M_{2n} &= \frac{u_{2n}}{c_2} = \frac{u_2 \sin(\beta)}{c_2} \\
 &= \frac{u_2 \sin(\alpha - \delta)}{c_2} \\
 &= M_2 \sin(\alpha - \delta)
 \end{aligned}$$

$$M_2^2 = \frac{M_{2n}^2}{\sin^2(\alpha - \delta)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha - \delta)} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2(\alpha)}{2\gamma M_1^2 \sin^2(\alpha) - (\gamma - 1)} \right)$$

- $M_1 > 1$, n'implique pas $M_2 < 1$, tout dépend des angles !

8.2 Ondes de choc obliques

- La conservation de la composante tangentielle

impose : $u_{1\tau} = u_1 \cos(\alpha) = u_{2\tau} = u_2 \cos(\beta) = u_2 \cos(\alpha - \delta)$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha - \delta)}$$

- Le rapport de composantes normales devient :

$$\frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \frac{u_2 \sin(\alpha - \delta)}{u_1 \sin(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha - \delta)}{\tan(\alpha)} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2}$$

- La relation entre l'angle de déflexion de l'écoulement et l'angle du choc est donc :

$$\delta = \alpha - \arctan \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2(\alpha)}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2(\alpha)} \tan(\alpha) \right)$$

8.2 Ondes de choc obliques

- En pratique :
 - ✓ Lire dans une table ou un graphique l'angle du choc (α) et l'angle de déviation (δ) en fonction du Mach amont M_1
 - ✓ Calculer M_2 et toutes les grandeurs à partir des relations à travers les chocs

$$M_2^2 = \frac{M_{2n}^2}{\sin^2(\alpha - \delta)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha - \delta)} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2(\alpha)}{2\gamma M_1^2 \sin^2(\alpha) - (\gamma - 1)} \right)$$

8.2 Ondes de choc obliques

- Une choc oblique se développe quand le Mach dans la direction normale à l'onde est supérieur à l'unité, ce qui implique un angle d'inclinaison supérieur à un angle limite qui dépend du Mach amont :

$$M_{1n} = M_1 \sin(\alpha_o) > 1 \longrightarrow \alpha_o > \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right)$$

- D'après la relation entre l'angle de déviation et l'angle du choc, au dessus de cette limite quand l'angle du choc approche $\pi/2$, l'angle de déviation tend vers zéro et les relations d'un choc droit sont retrouvées :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \delta = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left[\alpha - \arctan \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin(\alpha)}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin(\alpha)} \tan(\alpha) \right) \right] = 0$$

8.2 Ondes de choc obliques

- L'angle de déviation tend aussi vers zéro quand le Mach dans la direction normale tend vers l'unité :

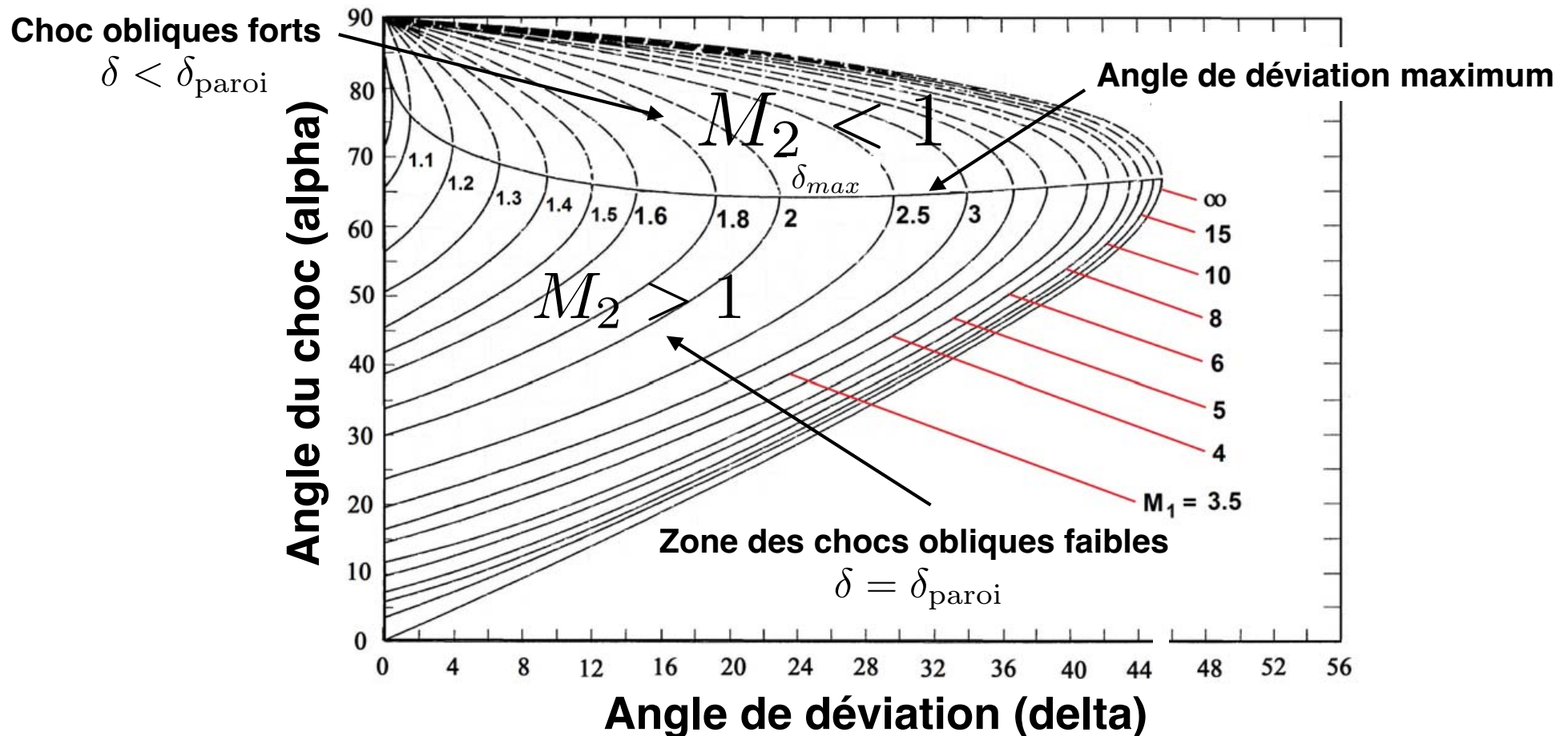
$$\lim_{M_{1n} \rightarrow 1} \delta = \lim_{M_1^2 \sin^2(\alpha) \rightarrow 1} \left[\alpha - \arctan \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin(\alpha)}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin(\alpha)} \tan(\alpha) \right) \right] = 0$$

$$M_1^2 \sin^2(\alpha) = M_{1n}^2 \rightarrow 1 \quad \longrightarrow \quad \alpha \rightarrow \arcsin \left(\frac{1}{M_1} \right)$$

- Nous avons vu qu'un choc apparaît pour $\alpha_o > \arcsin \left(\frac{1}{M_1} \right)$
- Donc juste en dessous de l'angle limite où un choc oblique apparaît, le Mach dans la direction normale tend vers l'unité et une onde de Mach est observée.

8.2 Ondes de choc obliques

- Dans le cas d'un choc oblique fort ($M_2 < 1$), l'angle de déviation (δ) de l'écoulement n'est pas égal à l'angle d'inclinaison de la paroi. Delta devient plus petit que l'angle de la paroi.



Un peu d'histoire avant de parler d'ondes caractéristiques

George Gabriel Stokes suggested the possibility of shock waves in a note, “On a Difficulty in the Theory of Sound,” published in the *Philosophical Magazine* in 1848. Stokes had observed that a certain waveform becomes infinitely steep:

Of course, after the instant at which the expression (A) becomes infinite, some motion or other will go on, and we might wish to know what the nature of the motion was. Perhaps the most natural supposition to make for trial is, that a surface of discontinuity is formed, in passing across which there is an abrupt change of density and velocity. The existence of such a surface will presently be shown to be possible

Un peu d'histoire avant de parler d'ondes caractéristiques

Almost 30 years later, a former student of Stokes, Lord Rayleigh, was preparing to publish his *Theory of Sound* and offered the following objection:

4 Carlton Gardens, S.W.
June 2/77

Dear Prof. Stokes,

In consequence of our conversation the other evening I have been looking at your paper "On a difficulty in the theory of sound," *Phil. Mag.* Nov. 1848. The latter half of the paper appears to me to be liable to an objection, as to which (if you have time to look at the matter) I should be glad to hear your opinion [There follows a "proof."] It would appear therefore that on the hypotheses made, no discontinuous change is possible.

I have put the matter very shortly, but I dare say what I have said will be intelligible to you.

Un peu d'histoire avant de parler d'ondes caractéristiques

Stokes, who had some reputation for diffidence, replied at once:

Cambridge
5th June, 1877

Dear Lord Rayleigh,

Thank you for pointing out the objection to the queer kind of motion I contemplated in the paper you refer to. Sir W. Thomson [Lord Kelvin] pointed the same out to me many years ago, and I should have mentioned it if I had had occasion to write anything bearing on the subject, or if, without that, my paper had attracted attention. It seemed, however, hardly worth while to write a criticism on a passage in a paper which was buried among other scientific antiquities

P.S. You will observe I wrote somewhat doubtfully about the possibility of the queer motion.¹

Un peu d'histoire avant de parler d'ondes caractéristiques

For Rayleigh this apparently settled the matter. The following passage appears in his *Theory of Sound* [1894; vol. 2, p. 40]:

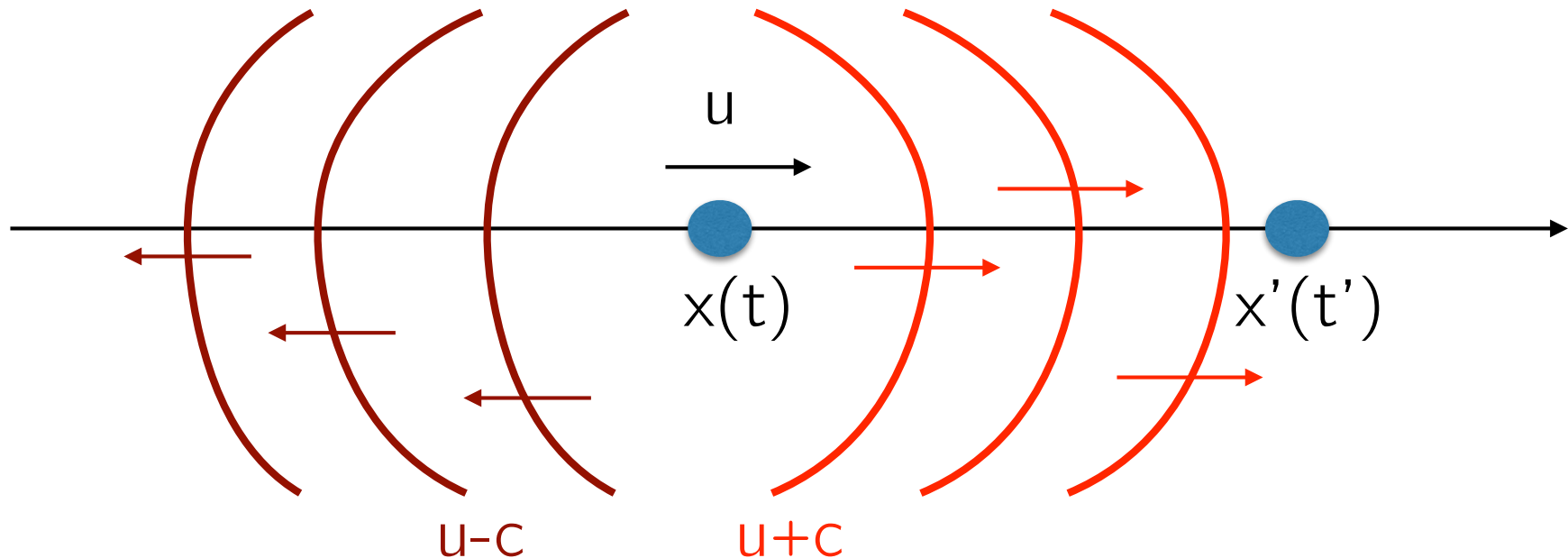
but it would be improper to pass over in silence an error on the subject of discontinuous motion into which Riemann and other writers have fallen. It has been held that a state of motion is possible in which the fluid is divided into two parts by a surface of discontinuity.

There follows a proof of the impossibility of such motions based on a “violation” of the conservation of energy. Even Horace Lamb’s celebrated *Hydrodynamics* [1932, p. 484] treads this same ground. A source of confusion was the entropy condition; the recognition that the entropy should increase, i.e., that dissipative terms could not be neglected *within* the shock front, was, however, pointed out by Zemplén (1905) and acknowledged by Rayleigh himself (1910). In addition, Mach’s paper of 1887 contains a schlieren photograph which (in retrospect) clearly shows a shock front.

Algebraic shock conditions, incorporating energy conservation, are due to Rankine (1870) and to Hugoniot (1887, 1889), and their names have come to be associated with the shock conditions generally.¹ Stokes’ claim to recognition for his discovery has been diverted by circumstance.²

8.3 Invariants de Riemann et caractéristiques

- Dans un gaz, de l'information est transportée suivant trois vitesses :



- Une fonction F évolue entre deux points et deux instants suivant la dérivée particulaire :

$$\begin{aligned} \frac{F(x'(t')) - F(x(t))}{t' - t} &= \frac{F(x'(t')) - F(x'(t))}{t' - t} + \frac{F(x'(t)) - F(x(t))}{t' - t} \\ &= \frac{F(x'(t')) - F(x'(t))}{t' - t} + \frac{F(x'(t)) - F(x(t))}{x'(t) - x(t)} \times \frac{x'(t) - x(t)}{t' - t} \\ \lim_{t \rightarrow t'} & \quad \partial F / \partial t \quad \quad \quad \partial F / \partial x \quad \quad \quad u \end{aligned}$$

8.3 Invariants de Riemann et caractéristiques

- Si la fonction est invariante (constante) quand elle est transportée à la vitesse 'u' suivant la direction 'x' :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

8.3 Invariants de Riemann et caractéristiques

- L'existence des chocs se justifie en ré-organisant les équations d'Euler pour faire apparaître les invariants de Riemann.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad \text{Conservation masse}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{Conservation QDM}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u}{\partial x} + \frac{\partial P u}{\partial x} = 0 \quad \text{Conservation energie}$$

$$\rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2$$

$$\begin{array}{lcl} c^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \longrightarrow 2cdc = \gamma \frac{dP}{\rho} - \gamma \frac{P d\rho}{\rho^2} & \Bigg| & \frac{dc}{c} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{d\rho}{\rho} \\ P \rho^{-\gamma} = P_i \rho_i^{-\gamma} \longrightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} & & \downarrow \\ & & d\rho = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\rho}{c} dc \end{array}$$

8.3 Invariants de Riemann et caractéristiques

- En introduisant la relation entre variation de densité et de vitesse du son dans la conservation de la masse, le système des équations d'Euler devient :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{2}{\gamma - 1} u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

- Ces deux équations sont ajoutées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\gamma - 1} c \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \downarrow & \\ 2cdc = dc^2 = \gamma d \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\gamma}{\rho} dP - \frac{\gamma P}{\rho^2} d\rho & \quad \begin{array}{l} \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \\ \downarrow \\ (\gamma - 1) \frac{dP}{\rho} \end{array} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) &= 0\end{aligned}$$

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- De même en soustrayant la conservation de la QDM à la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) = 0$$

- Les deux quantités R_+ et R_- sont donc transportées aux vitesses $u+c$ et $u-c$:

$$\begin{array}{llll} R_+ & = & u + \frac{2c}{\gamma - 1} & \xrightarrow{\text{vitesse convective}} & u + c \\ R_- & = & u - \frac{2c}{\gamma - 1} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & u - c \end{array}$$

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- L'équation de l'énergie totale est réorganisée sous la forme d'une équation pour la pression :

$$\rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u}{\partial x} + \frac{\partial P u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P u}{\partial x} \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 u}{\partial x} \right)}_{-u(\partial P / \partial x) \text{ Bilan d'énergie cinétique}} + \frac{\partial P u}{\partial x} &= 0 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{P(\partial u / \partial x)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- En absence d'onde de choc, l'entropie est conservée :

$$s = P \rho^{-\gamma} \longrightarrow ds = \rho^{-\gamma} dP - \gamma \rho^{-\gamma-1} P d\rho$$

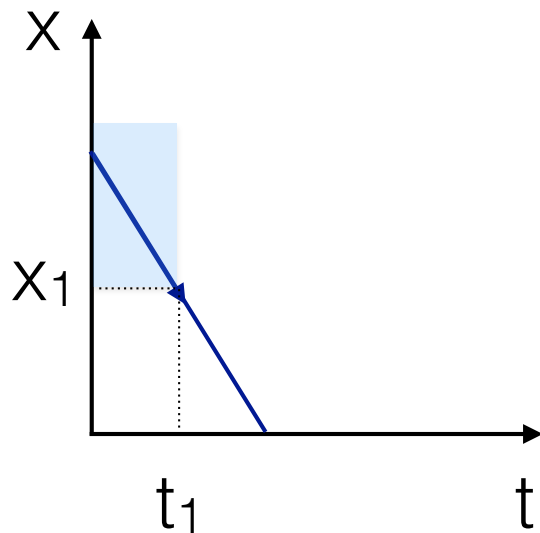
$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= \rho^{-\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \gamma \rho^{-\gamma-1} P \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ &\stackrel{\rho c^2 = \gamma P}{=} -\rho^{-\gamma} \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \rho^{-\gamma-1} P \left(-\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\stackrel{=}{=} -\rho^{-\gamma} \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} + \rho^{-\gamma} \gamma P \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

- L'entropie est donc un invariant transportée à la vitesse 'u'.
- Pas de surprise puisque l'écoulement est supposé isentropique !

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

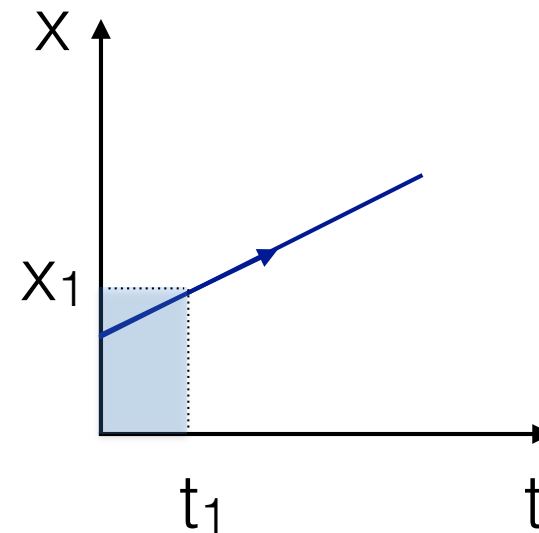
$$x = (u - c)(t - t_o) + x_o$$

● $u < c$



A un instant donné, l'information arrive en un point après être passée par des positions situées en aval ($x > x_1$), donc l'information remonte vers ce point

● $u > c$



A un instant donné, l'information arrive en un point après être passée par des positions situées en amont ($x < x_1$), donc l'information située en aval ne remonte pas vers ce point

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

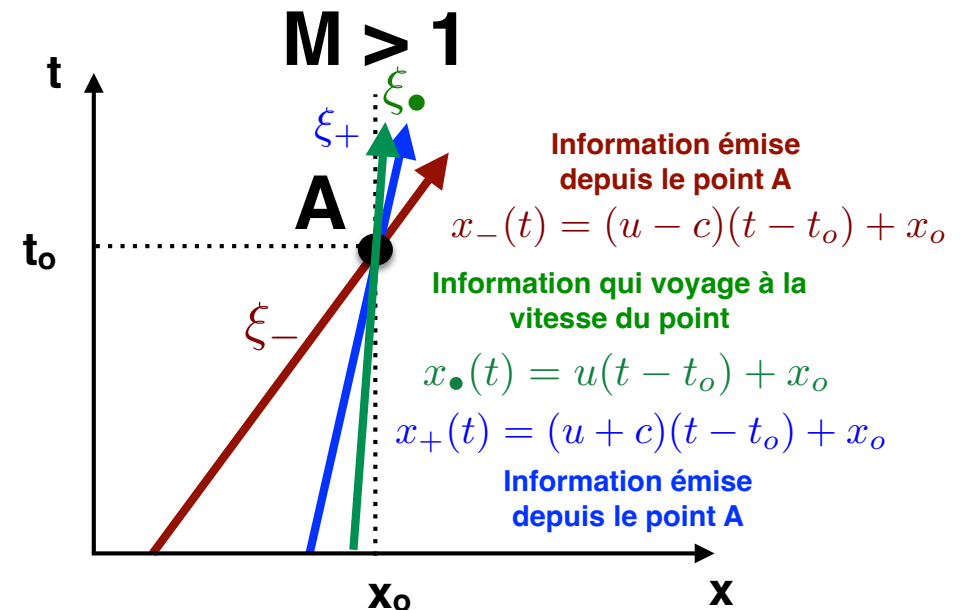
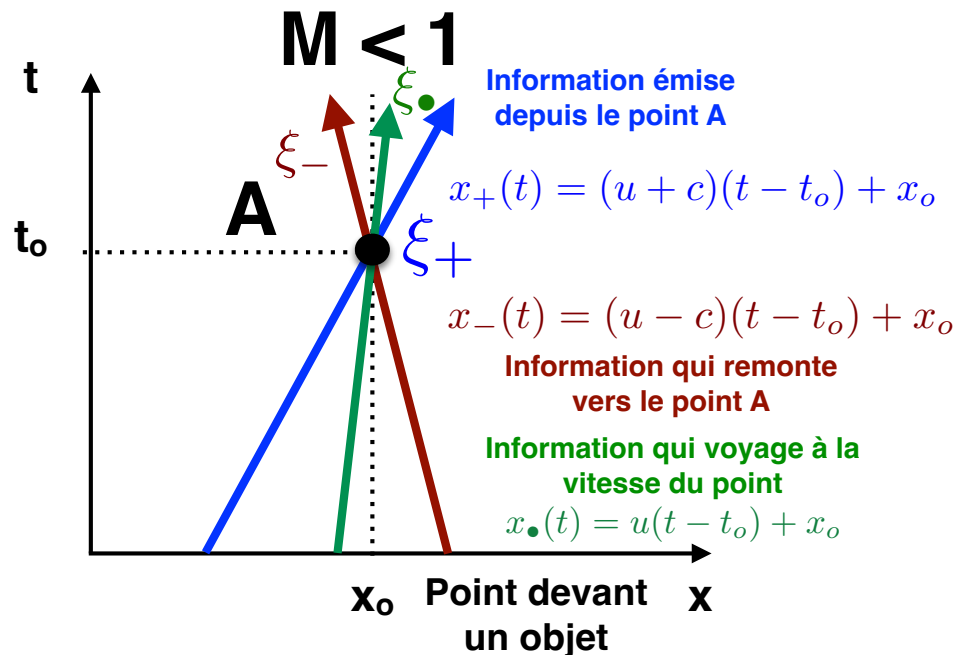
- Les invariants $R_{\pm}$ sont conservés le long des lignes caractéristiques :

$$\frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial R_{\pm}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} dt + (u \pm c) dt \frac{\partial R_{\pm}}{\partial x} = \frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} dt + dx \frac{\partial R_{\pm}}{\partial x} = dR_{\pm} = 0$$

- Les lignes caractéristiques sont définies par :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u & & x_{\bullet}(t) = u(t - t_o) + x_o \\ \frac{dx}{dt} = u \pm c & & x_{\pm}(t) = (u \pm c)(t - t_o) + x_o \end{aligned}$$



8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- D'après la conservation de la masse et l'équation pour la pression, les variations de pression et de densité sont reliées par :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{d\rho}{d\xi_{\bullet}} - \frac{1}{c^2} \frac{dP}{d\xi_{\bullet}} = 0$$

avec

Dérivée le long de la caractéristique

$$\frac{d}{d\xi_{\bullet}} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

- De même les deux autres caractéristiques trouvées ci-dessus s'organisent sous la forme :

$$\frac{dP}{d\xi_{+}} + \rho c \frac{du}{d\xi_{+}} = 0$$

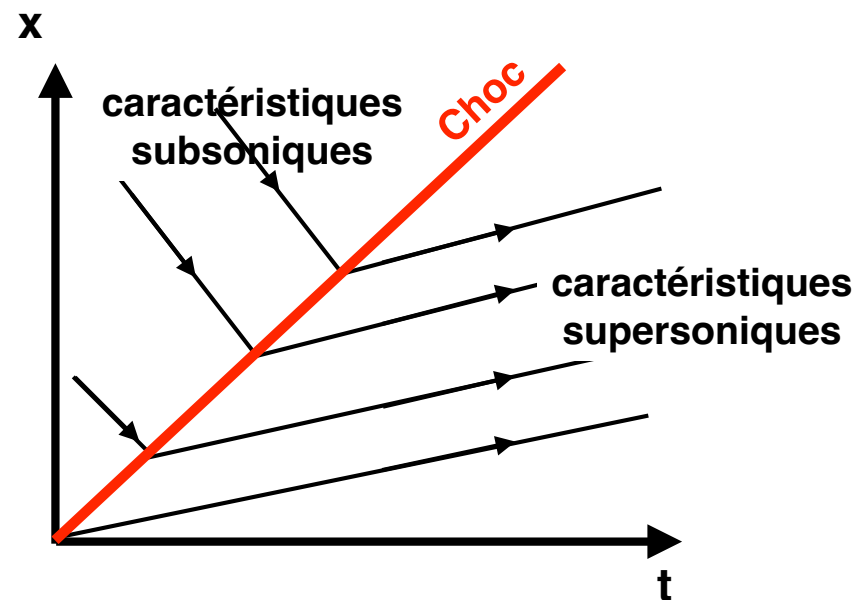
$$\frac{dP}{d\xi_{-}} - \rho c \frac{du}{d\xi_{-}} = 0$$

$$\frac{d}{d\xi_{+}} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{d}{d\xi_{-}} = \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x}$$

8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- Ces équations confirment ce que nous avons vu au début du cours : dans un écoulement supersonique aucune information ne remonte depuis l'aval pour préparer le gaz au repos à l'arrivée des molécules de gaz en mouvement.
- En présence d'un choc, les caractéristiques changent de pente, comme il ne peut y avoir deux valeurs des invariants de Riemann sur une caractéristique, les grandeurs aérodynamiques présentent une discontinuité :



8.3 Invariants de Riemann et lignes caractéristiques

- Les lignes caractéristiques permettent de résoudre numériquement les problèmes hyperboliques, donc tous les problèmes de type ‘convectif’ :
 - ✓ Une fois connus les invariants en un point, les variables présentes dans les invariants sont reconstruites en remontant ou en descendant les lignes caractéristiques.
 - ✓ Très utile pour les conditions aux limites entrée/sortie :
 - une partie des valeurs aux frontières est calculée en suivant les caractéristiques sortantes, à partir des invariants connus à l’intérieur du domaine ;
 - les valeurs aux frontières restantes sont calculées en suivant les caractéristiques entrantes à partir des invariants connus à l’extérieur du domaine (pression atmosphérique, etc.)

9. Déflagration & Détonation

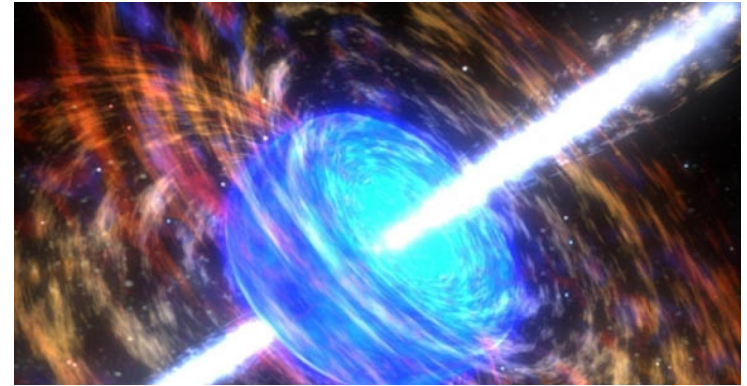
- Une déflagration est une onde de combustion qui se propage par diffusion de la chaleur (usuellement avec un $Mach < 1$).
- Une détonation est onde de combustion qui se propage derrière un choc qui allume les gaz, toujours avec $M \gg 1$.
- La compréhension du développement de ces 'explosions', en particulier les mécanismes qui contrôlent la transition entre déflagration et détonation est essentiel pour :
 - ✓ la sécurité des installations industrielles ;
 - ✓ la formation des supernovae ;
 - ✓ les NTE, nouvelles technologies de production d'énergie (fusion...).
- La différence entre une onde avec réaction chimique, par exemple une explosion de gaz, et ce que nous avons fait ci-dessus, réside essentiellement dans le fait que la composition du gaz change de chaque côté de l'onde.
- L'enthalpie de formation des gaz n'est pas la même de chaque côté de l'onde et la différence d'enthalpie de formation donne lieu à un dégagement de chaleur dans une zone de réaction chimique entre les gaz frais (devant l'onde) et brûlés (derrière l'onde).

9. Déflagration & Détonation

Catastrophe de
Buncefield



supernovae



Fusion



Beyrouth Août 2020

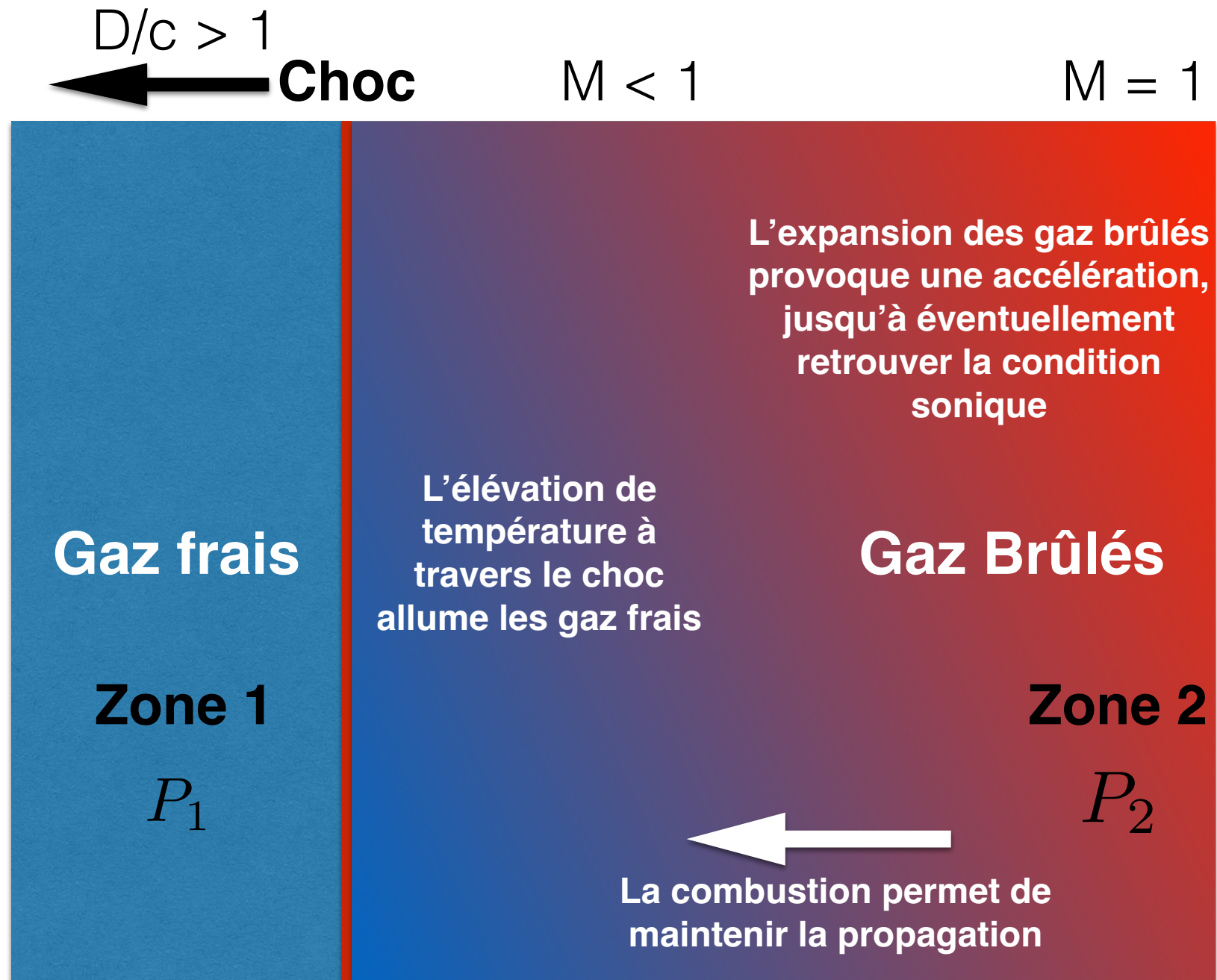


9. Déflagration & Détonation

Beyrouth Août 2020



9. Déflagration & Détonation



9. Déflagration & Détonation

- Entre la condition en amont du choc et la condition juste derrière le choc (avant le dégagement de chaleur par la combustion), les relations de saut à travers un choc vue précédemment sont valides.
- Cette zone juste derrière le choc est généralement appelée : Condition, ou point, de Neumann.
- Attention: ici on considère l'état 2 dans les gaz brûlés, donc après la condition de Neumann, loin du choc.

9. Déflagration & Détonation

- Quantité connues :

$$P_1, \rho_1, T_1, \Delta h$$

- Inconnues :

$$P_2, \rho_2, T_2, u_2, u_1$$

- Pour les chocs, on fixait M_1 , ici la physique de la détonation (couplage entre le choc et la flamme) détermine le nombre de Mach de propagation de l'onde. Plus d'inconnues que d'équations !

9. Déflagration & Détonation

- Conservation de la masse et de la quantité de mouvement restent inchangés (i.e., comme pour les chocs inertes) :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$\rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2$$

- La conservation de l'énergie fait intervenir les enthalpies de formation :

$$C_P T_1 + h_1^o + \frac{1}{2} u_1^2 = C_P T_2 + h_2^o + \frac{1}{2} u_2^2$$

$$\Delta h = h_1^o - h_2^o \quad \text{Dégagement de chaleur}$$

9. Déflagration & Détonation

- La combinaison de la conservation de la masse avec la QDM apporte :

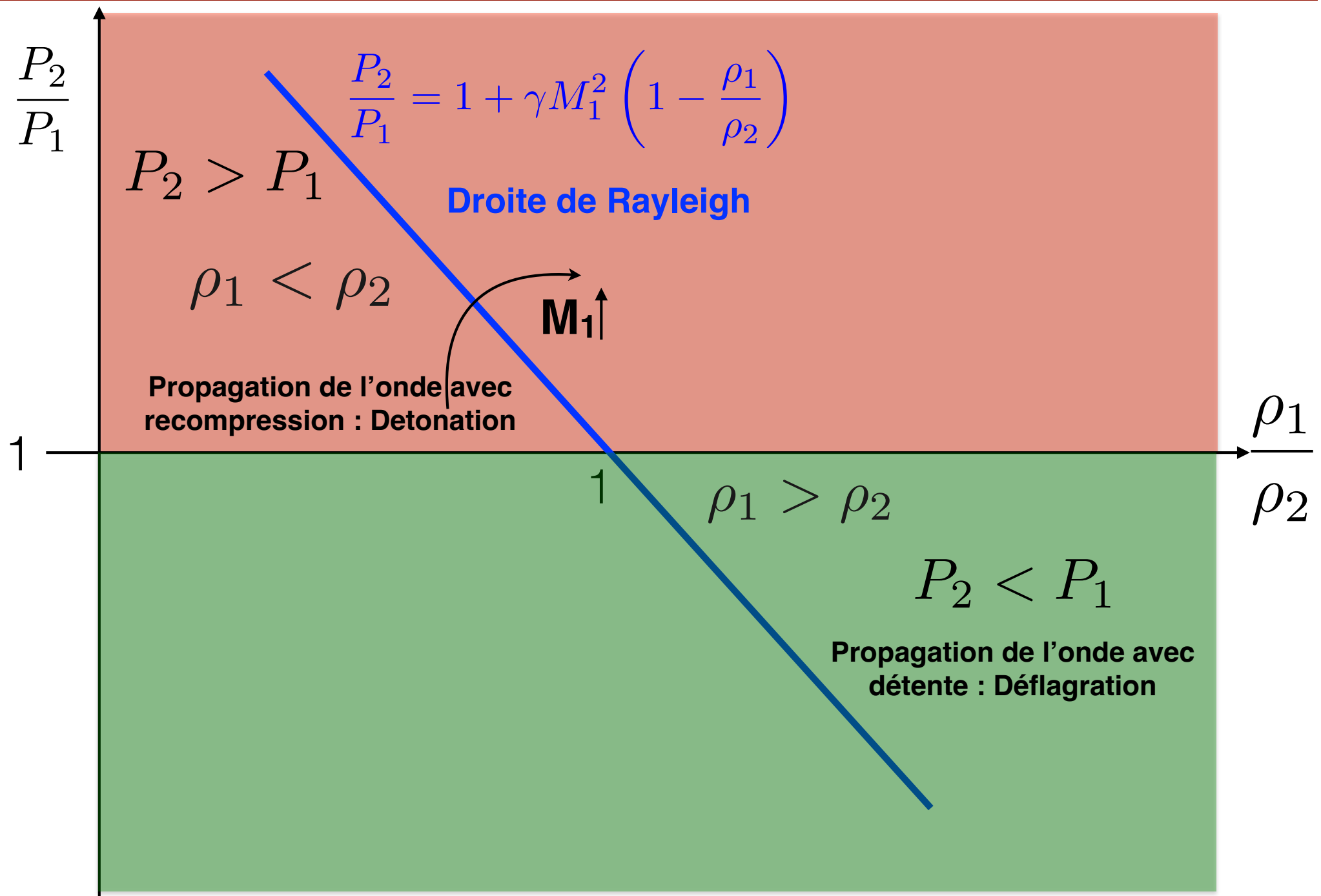
$$\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = (\rho_1 u_1)^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = P_2 - P_1$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} = - (\rho_1 u_1)^2 \rightarrow \frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1} = - \frac{(\rho_1 u_1)^2}{\rho_1 P_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad \left[\frac{(\rho_1 u_1)^2}{\rho_1 P_1} \right] = \gamma M_1^2$$

‘Droite de Rayleigh’ dans le plan
(Pression, volume massique - 1/rho)

9. Déflagration & Détonation



9. Déflagration & Détonation

- Avec la loi d'état et la définition du C_p , la conservation d'énergie s'organise sous la forme :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) = h_1^o - h_2^o$$

- La différence d'énergie cinétique s'écrit en introduisant la conservation de la masse :

$$\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\rho_1 u_1)^2}{\rho_1^2} - \frac{(\rho_2 u_2)^2}{\rho_2^2} \right) = \frac{1}{2} (\rho_1 u_1)^2 \left[\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right]$$

9. Déflagration & Détonation

- Avec la relation entre la pression et la vitesse trouvée ci-dessus $P_2 - P_1 = -(\rho_1 u_1)^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{P_2 - P_1} = \frac{\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

- La conservation de l'énergie devient :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) - \frac{1}{2} (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) = \Delta h$$

9. Déflagration & Détonation

- En divisant par P_1 et multipliant par ρ_1 :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2/P_1}{\rho_2/\rho_1} - 1 \right) - \frac{1}{2} (P_2/P_1 - 1) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + 1 \right) = \frac{\rho_1 \Delta h}{P_1}$$

- Après avoir isolé le rapport de pression :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\rho_1 \Delta h}{P_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

Le dégagement de chaleur augmente la pression en aval du choc

9. Déflagration & Détonation

- Ce qui se réorganise avec $\alpha = (2\rho_1 \Delta h) / P_1$

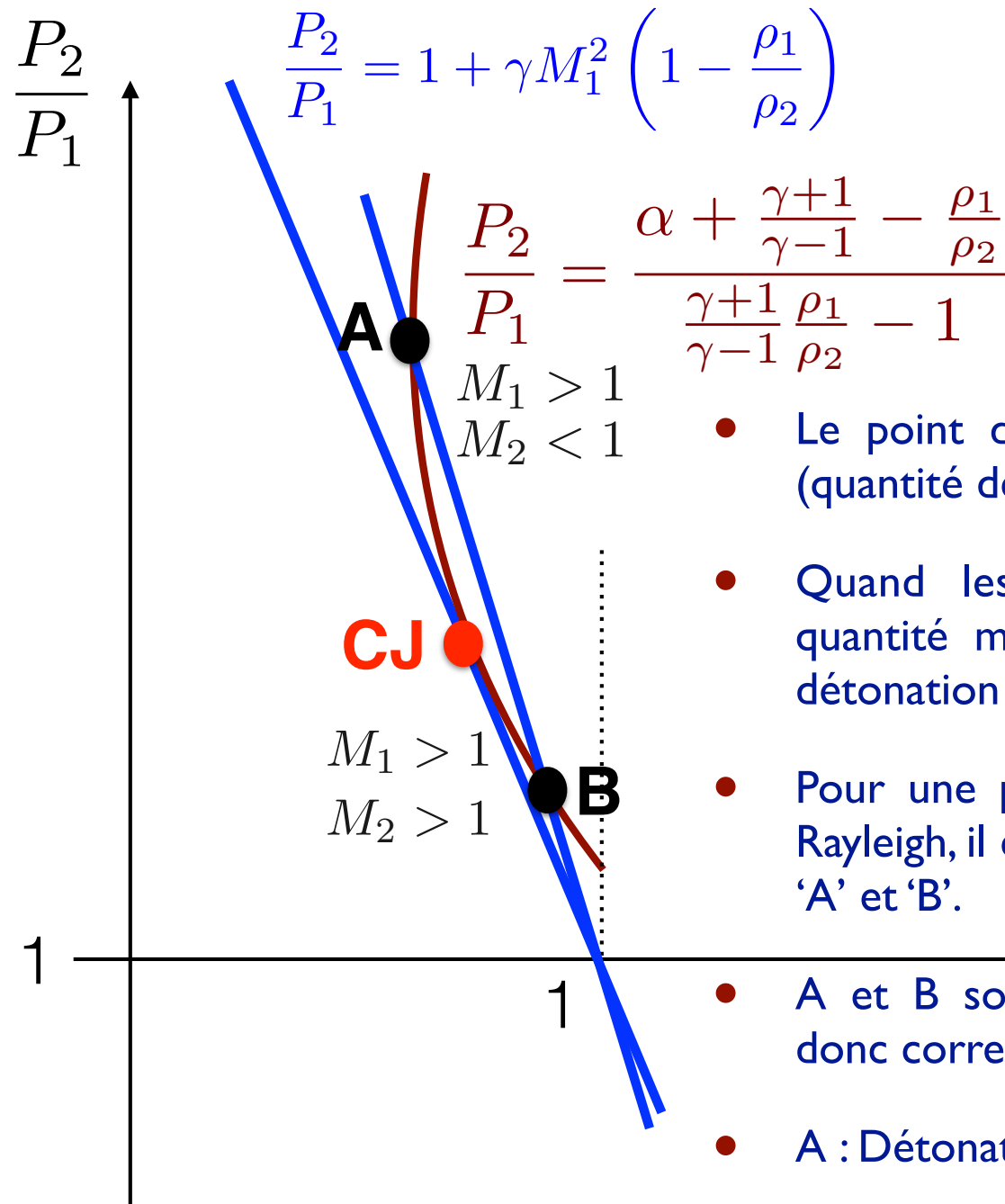
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}$$

C'est la courbe d'Hugoniot dans le plan
(rapport de pression, rapport de volume massique)

9. Déflagration & Détonation

$$\alpha = (2\rho_1 \Delta h) / P_1$$

Les points de fonctionnement se trouvent à l'intersection entre les deux courbes qui représentent la conservation de la masse, QDM et énergie



- Le point de fonctionnement dépend de alpha (quantité de chaleur dégagée) et de M_1
- Quand les deux courbes sont tangentes : quantité minimale d'énergie pour obtenir une détonation - Point de Chapman-Jouguet 'CJ'
- Pour une pente plus marquée de la droite de Rayleigh, il existe deux points de fonctionnement 'A' et 'B'.

- A et B sont sur la même droite de Rayleigh, donc correspondent au même M_1
- A : Détonation forte, B: Détonation faible

9. Déflagration & Détonation

- Si la droite de Rayleigh croise (ou est tangente) à la courbe d'Hugoniot avec $P_2 < P_1$, il s'agit de déflagrations.
- Il existe donc aussi un point CJ pour les déflagrations (i.e., $Mach = 1$ dans les gaz brûlés, comme nous allons le montrer).
- La vitesse de l'onde réactive est alors subsonique, avec une accélération dans les gaz brûlés qui conduit à la condition sonique.
- Ici nous ne regardons que les conditions de saut, mais en pratique il faut relier ces conditions et seule les déflagrations faibles existent (pas de structure interne possible pour les déflagrations fortes).

9. Déflagration & Détonation

- Les détonations ‘naturelles’ sont attendues essentiellement aux conditions CJ, qui représente le point de fonctionnement le plus simple que nous allons considérer par la suite.
- Les détonations fortes doivent être soutenues par un ‘effet piston’.
- Dans les faits, la physique est plus compliquée que ces simples bilans globaux. Les conditions aux limites et le dégagement de chaleur peuvent conduire à des instabilités et des variations de la vitesse de propagation de l’onde apparaissent, avec des effets bi- et tridimensionnels très marqués.
- Les détonations faibles sont sujettes à discussion, difficiles à observer en pratique.

9. Déflagration & Détonation

Droite de Rayleigh

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

- Pente de la droite de Rayleigh :

$$-\gamma M_1^2 = \frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}$$

Courbe d'Hugoniot

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}$$

- La pente de la courbe d'Hugoniot est obtenue par dérivée

$$d\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1} \left[-d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) - \frac{P_2}{P_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \right] = -\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (P_2/P_1) + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\rho_1/\rho_2) - 1} d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

- En égalant les deux pentes (Rayleigh et Hugoniot), on trouve le point CJ :

$$\frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1} = -\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}$$

9. Déflagration & Détonation

- Le calcul donne pour le point CJ :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_1 / \rho_2}{(\gamma + 1)(\rho_1 / \rho_2) - \gamma}$$

- En remettant cette condition dans la droite de Rayleigh

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{\rho_1 / \rho_2}{(\gamma + 1)(\rho_1 / \rho_2) - \gamma}$$

- On trouve le Mach au point CJ :

$$\frac{(\rho_1 u_1)^2}{\rho_1 P_1} = \gamma M_1^2 = \gamma \frac{P_2 / P_1}{\rho_1 / \rho_2}$$

9. Déflagration & Détonation

- Ou encore :

$$(\rho_1 u_1)^2 = (\rho_2 u_2)^2 = \gamma P_2 \rho_2$$

$$u_2^2 = \gamma \frac{P_2}{\rho_2} = c_2^2$$

- Donc le point CJ est le point où la condition sonique est atteinte $M_2 = 1$! (vrai pour les détonations $P_2/P_1 > 1$ ou déflagrations $P_2/P_1 < 1$)

9. Déflagration & Détonation

- La relation entre M_1 et les rapports de densités et pressions au point CJ :

$$1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{\rho_1 / \rho_2}{(\gamma + 1)(\rho_1 / \rho_2) - \gamma}$$



$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

$$M_1^2 = \frac{P_2 / P_1}{\rho_1 / \rho_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$

9. Déflagration & Détonation

- Au point CJ :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}$$

Déflagration	$M_1 < 1$	$P_1 > P_2$	$\rho_1 > \rho_2$
Détonation	$M_1 > 1$	$P_1 < P_2$	$\rho_1 < \rho_2$

9. Déflagration & Détonation

$$\alpha = (2\rho_1 \Delta h) / P_1$$

- En combinant la conservation de l'énergie avec l'égalité des pentes (droite de Rayleigh et Hugonniot) au point CJ :

Conservation masse + énergie + QDM

Egalité des pentes

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - (\rho_1/\rho_2)}{(\rho_1/\rho_2) \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1} = \frac{\rho_1/\rho_2}{(\gamma+1)(\rho_1/\rho_2) - \gamma}$$



$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma} \left(\alpha + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + \left(\alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) = 0$$

$$a \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + b \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + c = 0$$

- La résolution de cette équation du second degré apporte :

$$a = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad b = -\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha + 2 \right) \quad c = \left(\alpha + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^2 \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma^2} \alpha^2 + \frac{4}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \alpha \right] = \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma^2} \alpha^2 \left[1 + \frac{4\gamma}{\alpha(\gamma^2 - 1)} \right]$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\alpha + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right) = 1 + \alpha \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\rho_1 \Delta h / P_1)$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha \left(1 + \frac{4\gamma}{(\gamma^2 - 1)\alpha} \right)^{1/2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\rho_1 \Delta h / P_1) \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2}$$

9. Déflagration & Détonation

- Le rapport de densité est donc :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + (\rho_1 \Delta h / P_1) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \left[1 \oplus \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2} \right]$$

Densité - : détonation, + : déflagration,

- En remplaçant dans la relation pression/densité au point CJ :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + (\rho_1 \Delta h / P_1) (\gamma - 1) \left[1 \pm \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2} \right]$$

Pression + : detonation, - : deflagration

Attention : l'ordre des signes change pour respecter le positionnement relatif des rapports suivant le Mach

9. Déflagration & Détonation

- En repartant de la relation au point CJ :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$



$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + (\rho_1 \Delta h / P_1) (\gamma - 1) \left[1 \pm \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2} \right]$$

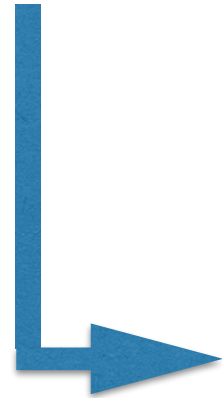
$$M_1^2 = 1 + \frac{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)}{\gamma} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2} \right]$$

9. Déflagration & Détonation

$$M_1^2 = 1 + \frac{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)}{\gamma} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\rho_1 \Delta h / P_1)} \right)^{1/2} \right]$$

On pose

$$Q = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \left(\frac{\rho_1 \Delta h}{P_1} \right)$$



$$\begin{aligned} M_1^2 &= 1 + 2Q \left[1 \pm \left(1 + \frac{1}{Q} \right)^{1/2} \right] \\ &= 1 + 2Q \pm 2Q \left(1 + \frac{1}{Q} \right)^{1/2} \\ &= (1 + Q) + Q \pm 2Q \left(\frac{1 + Q}{Q} \right)^{1/2} \\ &= (1 + Q) + Q \pm 2Q^{1/2} (1 + Q)^{1/2} \\ &= \left[Q^{1/2} \pm (1 + Q)^{1/2} \right]^2 \end{aligned}$$

9. Déflagration & Détonation

$$M_1^2 = \left[Q^{1/2} \pm (1 + Q)^{1/2} \right]^2$$



$$\begin{aligned} M_1 &= \pm Q^{1/2} + (\pm \times \pm)(1 + Q)^{1/2} \\ &= (1 + Q)^{1/2} \pm Q^{1/2} \end{aligned}$$

9. Déflagration & Détonation

$$Q = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \left(\frac{\rho_1 \Delta h}{P_1} \right) \quad M_1 = (1 + Q)^{1/2} \pm Q^{1/2}$$

- Dans le cas de la déflagration au point CJ ($P_2 < P_1$) :

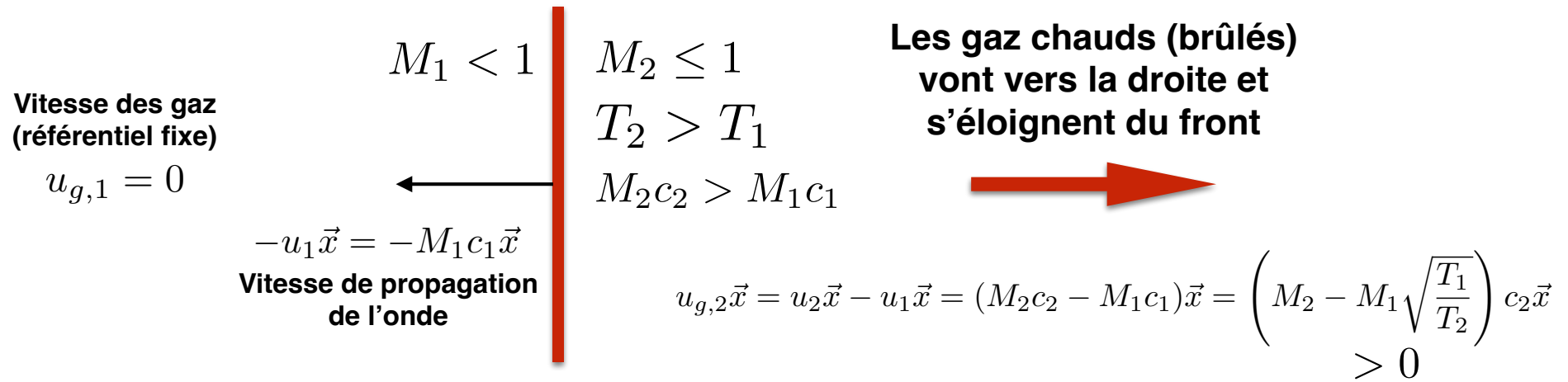
$$M_1 = \left[1 + \frac{(\rho_1 \Delta h / P_1)(\gamma^2 - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2} - \left[\frac{(\rho_1 \Delta h / P_1)(\gamma^2 - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2}$$
$$M_2 = 1$$

- Dans le cas de la détonation au point CJ ($P_2 > P_1$) :

$$M_1 = \left[1 + \frac{(\rho_1 \Delta h / P_1)(\gamma^2 - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2} + \left[\frac{(\rho_1 \Delta h / P_1)(\gamma^2 - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2}$$
$$M_2 = 1$$

9. Déflagration & Détonation

● Déflagration



● CJ Détonation

